INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA CON MATERIAL MANIPULATIVO EN EDUCACIÓN SECUNDARIA

Máster Universitario en Formación del Profesorado

Presentado por:

Dª ELENA L. PROENZA QUIRÓS

Dirigido por:

Dª BLANCA ARTEAGA MARTÍNEZ

Alcalá de Henares, a 22 de junio de 2019

Índice

Resumen

El presente trabajo describe el análisis realizado en un aula de segundo curso de educación secundaria obligatoria, centrado en contenidos de factorización de polinomios de segundo grado, utilizando material manipulativo.

Para ello se elabora un marco teórico, centrado en la búsqueda inicial de los errores y dificultades que se presentan cuando los estudiantes visualizan por primera vez el álgebra. Incidimos también sobre las investigaciones internacionales para la inclusión del álgebra en el currículo de primaria, pues se hace notorio que el pensamiento algebraico se puede implementar progresivamente en edades más tempranas, causado probablemente por la separación de la aritmética con el álgebra, y una transición forzada entre ambas.

Mediante el enfoque competencial y el uso de material manipulativo como propuesta didáctica, se muestran los resultados obtenidos, basados en el trabajo con sentencias algebraicas y productos notables. Es por ello que llegamos a la conclusión de que los estudiantes de segundo curso de educación secundaria obligatoria tienen la capacidad de aprender construyendo ellos mismos los conceptos y procedimientos a seguir, debatiendo entre pares a las conclusiones que llegaban.

Palabras clave: aritmética, álgebra, aprendizaje, razonamiento, metodología.

Introducción

Es habitual que cuando los estudiantes se inician con Álgebra hagan uso de sus conocimientos aritméticos adquiridos de manera previa, lo que supone que sea importante que este trabajo tenga la suficiente solidez para poder asentar los contenidos posteriores. El paso de la aritmética al álgebra debe ser progresivo y fundamentado (Kaput, 2000, 2008; Kieran, 2007; Artigue, 2012), dado que de no ser así, cabe pensar que a la hora de resolver problemas que conlleven contenidos de álgebra, el conocimiento de la aritmética sea insuficiente para que lo resuelvan satisfactoriamente, debido a la existencia de letras y números sobre los que hay que aplicar distintos algoritmos de suma, resta, multiplicación o división, además de que dichas operaciones se tienen que diferenciar entre la parte literal y la parte numérica. Por ello además el lenguaje empleado en la enseñanza del álgebra tiene a veces una particularidades que se han automatizado con fórmulas verbales que es esperable puedan dar lugar a distintos obstáculos de aprendizaje por su dificultad de comprensión; por ejemplo, cuando los estudiantes se inician en la resolución de ecuaciones, en las que deben de encontrar el valor de la incógnita, es frecuente que el docente utilice expresiones como “si está sumando pasa restando” o “si está dividiendo pasa multiplicando”, lenguaje que dificulta el procedimiento de resolución, pues carecen de sentido.

El principal cometido del Álgebra es la expresión y la manipulación de lo general. Como remarcan los autores Alonso, Barbero, Fuentes, Azcárate, Dozagarat, Gutiérrez y Ortiz (1993), es fundamental que las expresiones algebraicas estén escritas de una manera correcta, ya que si no darían lugar a dificultades en la interpretación del enunciado. Además dichos obstáculos no son casuales y son originados por diferentes causas didácticas, epistemológicas, cognitivas o actitudinales (Rabino, Cuello y Munno, 2004; Pochulu, 2004).

A la vista de esta situación, se aborda si sería adecuado introducir el Álgebra con material manipulativo. Por ello, las cuestiones que se plantean son las siguientes:

- ¿Las actividades participativas y/o colaborativas podrían desarrollar de manera comprensiva los contenidos algebraicos en el estudiante?
- ¿Cuáles son los obstáculos más habituales que tienen los estudiantes en segundo de educación secundaria obligatoria al aprender los contenidos de álgebra?
- ¿Cómo se podría evaluar a cada estudiante para que las actividades que se propongan sean adecuadas y personalizadas, y así poder sacar el máximo potencial de cada uno de ellos?

Etapas del desarrollo cognitivo de Piaget

Debido a que el trabajo de Jean Piaget sobre el desarrollo cognitivo de los niños, concretamente en los conceptos cuantitativos, ha brindado a los docentes una visión crucial de cómo los estudiantes aprenden los conceptos e ideas matemáticas, vamos a describir y caracterizar las etapas destacando las técnicas apropiadas para que el estudiante pueda obtener una base sólida para el aprendizaje de las matemáticas.

En los centros educativos los estudiantes suelen estar agrupados por edad cronológica, pero sus niveles de desarrollo pueden diferir significativamente (Weinert y Helmke, 1998). Esta diferencia puede depender de la madurez, la experiencia, la cultura y la capacidad del niño (Papila y Olds, 1996).

Piaget identificó cuatro etapas primarias de desarrollo: sensorio - motora o sensomotriz, preoperacional, operacional concreto y operacional formal. Nos centraremos en las dos últimas etapas ya que son las que afectan al alumnado al que nos dirigimos.

Etapa de las operaciones concretas

La tercera etapa se caracteriza por un incremento del aspecto cognitivo, por la celeridad en el desarrollo del lenguaje y el alcance de las competencias básicas. En esta etapa comienzan a llegar a conclusiones certeras a través del uso de la lógica, en tanto en cuanto las hipótesis iniciales estén relacionadas con situaciones concretas y no abstractas.

Por ejemplo, el niño puede distinguir que la cantidad de líquido en un envase no está relacionado con su forma. Además, para Piaget (1977) tanto la separación como la clasificación son las dos operaciones que más se desarrollan durante esta etapa y ambas son fundamentales para la comprensión de los conceptos numéricos. La separación es la capacidad de ordenar objetos de acuerdo con la longitud, el peso o el volumen de éste. Por otro lado, la clasificación implica agrupar objetos mediante una característica común. Según Burns y Silbey (2000), “las múltiples formas de representar una solución matemática pueden fomentar el desarrollo de esta etapa cognitiva” (p. 55).

Los docentes, por tanto, se apoyarán en objetos manipulativos ya que el alumnado necesita experiencias concretas, como el valor posicional y las operaciones aritméticas. Los materiales manipulativos existentes incluyen: bloques multibase, barras Cuisenaire, fichas de álgebra, cubos de álgebra, geoplanos, tangrams, y dados. A través del uso de los materiales manipulativos, los estudiantes van adquiriendo experiencias, que sientan las bases de un desarrollo cognitivo matemático más avanzado.

Uno de los desafíos importantes en la enseñanza de las matemáticas es ayudar a los estudiantes a hacer conexiones entre los conceptos matemáticos y la actividad. Es posible que los niños no hagan conexiones automáticamente entre el trabajo que hacen con los materiales de manipulación y las matemáticas abstractas correspondientes: "los niños tienden a pensar que las manipulaciones que hacen con los modelos son un método para encontrar una solución y las matemáticas con lápiz y papel son completamente distintas" (Burns y Silbey, 2000, p. 60). Por ejemplo, puede ser difícil para los niños conceptualizar cómo un rectángulo de cuatro por seis pulgadas construido con baldosas de madera se relaciona con cuatro multiplicado por seis, o cuatro grupos de seis. Los maestros podrían ayudar a los estudiantes a hacer conexiones al mostrar cómo se pueden separar los rectángulos en cuatro filas de seis mosaicos cada una y al demostrar cómo el rectángulo es otra representación de cuatro grupos de seis. Proporcionar varias representaciones matemáticas reconoce la singularidad de los estudiantes y proporciona múltiples vías para hacer que las ideas sean significativas.

Una herramienta para el desarrollo cognitivo en esta etapa es generar oportunidades para que los alumnos presenten soluciones matemáticas de múltiples maneras (por ejemplo, símbolos, gráficos, tablas y palabras). Eggen y Kauchak (2000) señalaron que, si bien una forma específica de representar una idea es significativa para algunos estudiantes, una representación diferente podría ser más significativa para otros.

Etapa de las operaciones formales

En esta etapa el niño puede realizar conjeturas y deducir posibles resultados. Además, empieza a ampliar patrones de pensamiento abstracto debido a que el razonamiento se realiza a través de símbolos matemáticos sin la necesidad de percepción.

Por ejemplo, el alumno puede resolver $x + 2x = 9$ sin tener que referirse a una situación concreta presentada por el profesor, como por ejemplo, “Tony se comió un cierto número de dulces. Su hermana se comió el doble. Ambos comieron nueve. ¿Cuántos comió Tony?” Las habilidades de razonamiento dentro de esta etapa se refieren al proceso mental involucrado en la generalización y evaluación de argumentos lógicos (Anderson, 1990) e incluyen: aclaración, inferencia, evaluación y aplicación.

Aclaración. La aclaración requiere que los estudiantes identifiquen y analicen los elementos de un problema, permitiéndoles descifrar la información necesaria para resolverlo. Al alentar a los estudiantes a extraer información relevante de una declaración de problemas, los profesores pueden ayudarlos a mejorar su comprensión matemática.

Inferencia. Los estudiantes en esta etapa están preparados para hacer inferencias inductivas y deductivas en matemáticas. Las inferencias deductivas implican el razonamiento de conceptos generales a instancias específicas. Por otro lado, las inferencias inductivas se basan en extraer similitudes y diferencias entre objetos.

Evaluación. La evaluación implica el uso de criterios para juzgar la idoneidad de una solución del problema. Por ejemplo, el estudiante puede seguir una rúbrica predeterminada para juzgar la corrección de su solución a un problema. La evaluación lleva a formular hipótesis sobre eventos futuros, asumiendo que la resolución de un problema es correcta hasta el momento.

Aplicación. La aplicación involucra a los estudiantes que conecten conceptos matemáticos con situaciones de la vida real. Por ejemplo, el estudiante podría aplicar su conocimiento de ecuaciones racionales a la siguiente situación: "Si mi primo es tres años mayor que mi hermana y la suma de sus edades es de 35, ¿qué edades tienen?"

Objetivos

Los objetivos que se exponen en este trabajo, tienen un doble alcance: general y específicos.

El objetivo general consiste en el diseño y posterior implementación de una propuesta didáctica en el aula de 2º de Educación Segundaria Obligatoria (ESO) a fin de diagnosticar sus conocimientos sobre los procedimientos algebraicos básicos, y clasificar los fallos que surgen al operar con expresiones no solo numéricas sino también algebraicas.

Por ello, se introducirá una nueva metodología cercana al alumno, estableciendo como objetivos específicos:

- Seleccionar y elaborar un dossier de material manipulativo específico para el aprendizaje del álgebra.
- Plantear actividades con operaciones entre expresiones algebraicas, la simplificación de expresiones racionales y la factorización sobre los diversos conjuntos numéricos.
- Analizar las representaciones de los problemas desarrollados, prestando especial atención a la representación pictórica del problema, y al lenguaje simbólico.
- Plantear y resolver problemas que conducen a ecuaciones lineales.

Descripción del proceso de elaboración del trabajo

La metodología específica del trabajo consiste en la combinación de una investigación bibliográfica con un estudio de campo. En la investigación bibliográfica se detallan las características más notables del uso del material manipulativo y sus aplicaciones en el aula a través de un marco teórico. El estudio de campo se realiza en tres aulas de 2º de Educación Secundaria Obligatoria (ESO).

Las partes que conforman el estudio son las siguientes:

1. Marco legislativo: Se ha realizado un análisis bibliográfico de los diferentes informes, publicados por organismos e instituciones sobre los errores cometidos por los estudiantes, que hemos considerado más relevantes en el inicio del álgebra. , además de las recomendaciones del *National Council of Teachers of Mathematics* (2000) y el *Common Standars* (2010).
2. Marco teórico: Se han tratado los antecedentes y las consideraciones teóricas de la enseñanza del álgebra.
3. Marco metodológico: Se detalla el uso del material manipulativo para la enseñanza de la factorización y expansión de las expresiones algebraicas dentro del aula. Se incluye la implementación y resultados del plan diseñado.

Marco Legislativo

La competencia matemática recogida en la Orden 75/2015, de 21 de enero, por la que se redactan los vínculos entre las competencias clave, los contenidos y los criterios de evaluación en la educación primaria, educación secundaria obligatoria y el bachillerato, se explicita como "La capacidad de aplicar el razonamiento matemático y sus herramientas para describir, interpretar y predecir fenómenos en su contexto" (p.8).

Propuesta del National Council of Teachers of Mathematics

El *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000) en su publicación Principios y Estándares para las matemáticas escolares, propone el Álgebra como uno de los cinco bloques de contenido, con la peculiaridad de que este bloque se debe desarrollar no solo desde niveles de secundaria sino incluso desde los primeros años de escolarización.

Evidentemente no se trataría de impartir un curso de Álgebra, sino de desarrollar el pensamiento algebraico a lo largo de su periodo educativo.

El álgebra en el sistema educativo de la Comunidad de Madrid

En el Diseño Curricular Base y Decreto de Primaria del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte no hace mención a contenidos que puedan sugerir nociones o actividades propias del inicio del razonamiento pre-algebraico. El primer nivel educativo, donde aparecen los primeros contenidos algebraicos, es el primer curso de la Educación Secundaria Obligatoria (E.S.O.).

De acuerdo con el Real Decreto 1105/2014, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, un contenido en 1º de la E.S.O. es el siguiente: "Operaciones con expresiones algebraicas o simbólicas muy sencillas. Ecuaciones. Resolución de ecuaciones sencillas" (Real Decreto 1105, 2014, p.411). Es el primer contenido de la enseñanza obligatoria que aparece en el currículo y que contiene álgebra mediante ecuaciones. Estas nociones son insuficientes para muchos de los estudiantes cuando se introduce el álgebra en la E.S.O. pues se presupone que están preparados para utilizar cierto nivel algebraico.

Molina (2009) recoge hace pocos años la situación de la investigación relacionada con el aprendizaje del álgebra en la escuela:

> En las últimas dos décadas se han realizado, a nivel internacional, numerosas investigaciones que analizan y promueven la integración del álgebra en el currículo de la educación primaria. (…) Se propone promover en las aulas la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas y, de este modo, cultivar hábitos de pensamiento que atiendan a la estructura que subyace a las matemáticas. (…) Esta propuesta persigue fomentar un aprendizaje con comprensión de las matemáticas y, en especial, facilitar el aprendizaje del álgebra. Se considera que diferentes modos de pensamiento algebraicos pueden emerger con naturalidad de las matemáticas propias de la educación primaria y tienen el potencial de enriquecer la actividad matemática escolar y, muy especialmente, el aprendizaje de la aritmética (pp.135-136).

Common Core State Standars Initiative

Cuando revisamos la legislación, es conveniente mirar a nuestro alrededor para conocer qué está sucediendo en otros países y comprobar similitudes y distancias en el trabajo educativo. Ya desde hace décadas la NCTM de Estados Unidos ha sido un referente con sus recomendaciones en forma de estándares, por ello, hoy queremos acercarnos a las nuevas recomendaciones dadas por la iniciativa *Common Core State Standars* (CCSSO), que desarrolla un enfoque coherente para mejorar el rendimiento a través del diseño de un plan de estudios globalizado.

Se esfuerzan por seguir el diseño previsto por Schmidt y Houang (2002), no solo haciendo hincapié en la comprensión conceptual de las ideas clave, sino también volviendo a los principios de organización tales como el valor posicional y las leyes de la aritmética para estructurar esas ideas.

Además, la "secuencia de temas y actuaciones" que se describe en un cuerpo de estándares de matemáticas debe respetar lo que ya se sabe sobre cómo aprenden los estudiantes.

Estas normas definen lo que los estudiantes deben entender y ser capaces de hacer en su estudio de las matemáticas. Pero pedirle a un estudiante que entienda algo también significa pedirle a un docente que evalúe si el estudiante lo ha entendido. Pero ¿cómo es la comprensión matemática? Una forma en que los docentes pueden hacer eso es pedirle al estudiante que justifique, de una manera que sea apropiada para la madurez matemática de su etapa, por qué una afirmación matemática en particular es verdadera o de dónde proviene una regla matemática. La comprensión matemática y la habilidad de procedimiento son igualmente importantes, y ambas son evaluables mediante el uso de tareas matemáticas de suficiente riqueza.

Los cambios clave que solicita el CCSSO se recogen en la tabla 1, en relación a nuestro tema de investigación.

Tabla 1. Common Core State Standards for Mathematics

1. Mayor enfoque en menos temas El *Common Core* exige un mayor enfoque en las matemáticas. En lugar de correr para cubrir muchos temas en un plan de estudios, piden a los maestros de matemáticas que reduzcan significativamente y profundicen la forma en que se gastan el tiempo y la energía en el aula. Esto significa enfocarse profundamente en el trabajo principal de cada grado de la siguiente manera: • En los grados K – 2: conceptos, habilidades y resolución de problemas relacionados con la suma y la resta • En los grados 3 a 5: conceptos, habilidades y resolución de problemas relacionados con la multiplicación y división de números enteros y fracciones

- En el grado 6: relaciones y relaciones proporcionales, y expresiones y ecuaciones algebraicas tempranas
- En el grado 7: relaciones y relaciones proporcionales, y aritmética de números racionales
- En el grado 8: álgebra lineal y funciones lineales.

Este enfoque ayudará a los estudiantes a obtener bases sólidas, incluida una comprensión sólida de los conceptos, un alto grado de habilidad y fluidez en los procedimientos, y la capacidad de aplicar las matemáticas que conocen para resolver problemas dentro y fuera del aula.

2. Coherencia: vinculación de temas y pensamiento a través de los grados

Las matemáticas no son una lista de temas desconectados, trucos o nemotécnicos; es una estructura de conocimiento coherente formado por conceptos interconectados. Por lo tanto, los estándares están diseñados alrededor de progresiones coherentes de un grado a otro. El aprendizaje está cuidadosamente conectado a través de los grados para que los estudiantes puedan desarrollar una nueva comprensión sobre las bases construidas en años anteriores. Por ejemplo, en 4º grado, los estudiantes deben "aplicar y extender los conocimientos previos de multiplicación para multiplicar una fracción por un número entero" (Estándar 4.NF.4). Esto se extiende a 5th grado, cuando se espera que los estudiantes desarrollen esa habilidad para "aplicar y extender los conocimientos previos de la multiplicación para multiplicar una fracción o un número entero por una fracción" (Estándar 5.NF.4). Cada estándar no es un evento nuevo, sino una extensión del aprendizaje previo.

La coherencia también está incorporada en los estándares en cuanto a cómo refuerzan un tema principal al utilizar temas complementarios y de apoyo. Por ejemplo, en lugar de presentar el tema con una serie de datos como un fin en sí mismo, el tema se usa para apoyar los problemas verbales en el que los estudiantes aplican habilidades matemáticas para resolver problemas.

3. Rigor: perseguir la comprensión conceptual, las habilidades de procedimiento y la fluidez, y la aplicación con la misma intensidad

- Rigor: se refiere al dominio profundo y auténtico de los conceptos matemáticos, que no dificultan las matemáticas ni introducen temas en los grados anteriores. Para ayudar a los estudiantes a cumplir con los estándares, los educadores deberán perseguir, con igual intensidad, tres aspectos de rigor en el trabajo principal de cada grado: comprensión conceptual, habilidades de procedimiento y fluidez, y aplicación.

- Comprensión conceptual: los estándares exigen la comprensión conceptual de conceptos clave, como el valor de posición y las proporciones. Los estudiantes deben poder acceder a los conceptos desde varias perspectivas para ver las matemáticas como algo más que un conjunto de mnemónicas o procedimientos discretos.
- Habilidades de procedimiento y fluidez: los estándares exigen velocidad y precisión en el cálculo. Los estudiantes deben practicar funciones básicas, como la multiplicación de un solo dígito, para tener acceso a conceptos y procedimientos más complejos. La fluidez debe abordarse en el aula o mediante materiales de apoyo, ya que algunos estudiantes pueden requerir más práctica que otros.
- Aplicación: Los estándares exigen que los estudiantes usen las matemáticas en situaciones que requieren conocimiento matemático. La aplicación correcta del conocimiento matemático depende de que los estudiantes tengan una comprensión conceptual sólida y fluidez en los procedimientos.

Fuente: CCSSO (2009). Recuperado de: http://www.corestandards.org/other-resources/key-shifts-in-mathematics/

Según establece CCSSO, al finalizar sexto grado los estudiantes deben entender el uso de las variables en las expresiones algebraicas, y utilizan la idea de mantener la igualdad en ambos lados de una ecuación. El sistema educativo español continúa con una enseñanza tradicional del álgebra, lo que conlleva a una serie de dificultades que veremos a continuación.

Marco Teórico

La enseñanza tradicional del álgebra ha sido criticada en la última década del siglo XX por numerosos expertos en la materia (Booth, 1999; Kaput, 1995, 1998, 2000). Unos años antes, en 1980, Kindt hizo hincapié en tres grandes problemas en los que ha incurrido este tipo de enseñanza: "falta de atención a la generalización y razonamiento, un salto demasiado rápido al tratamiento formal del álgebra, y la falta de claridad en para qué y para quién es de utilidad el álgebra" (Molina, 2006, p.43). Las disimilitudes entre la actual y la tradicional enseñanza del álgebra han conducido a buscar una forma más útil para su enseñanza, debido a la importancia del pensamiento abstracto que conlleva el álgebra, y para facilitar su comprensión a todo tipo de estudiantes.

Aritmética y Álgebra

Partimos de una referencia, de hace ya algunos años, centrada en dónde podemos poner esa línea divisoria no existente entre la aritmética y el álgebra,

> Los números, como todos los objetos de los conocimientos humanos se pueden considerar en general y en particular, es decir, bajo la relación de sus leyes y bajo la de sus hechos. Por ejemplo, esta proposición: La suma de dos números multiplicada por su diferencia; es igual a la diferencia de sus cuadrados, es una ley de los números, porque se aplica generalmente a todos ellos; mientras que ésta: once multiplicado por cinco es igual a cincuenta y cinco, es un hecho de dos números, porque solo se aplica a los números 11, 5 y 55.
>
> Esta distinción divide a la ciencia de los números en dos ramas generales, de las cuales el que trata de leyes es el Álgebra, y el que trata de hechos es la Aritmética (Vallejo, 1981, citado por Gómez, 1995, p.61).

Se define la aritmética como el estudio de los sistemas numéricos, sus relaciones reciprocas y sus reglas (Gómez, 1988). Mientras que se considera al álgebra como el estudio de conjuntos de elementos, y de las características formales de sus leyes de composición (Bouvier y George, 2000). Debido a ello, el álgebra es un mecanismo para la comprensión, expresión y comunicación de generalizaciones, para revelar estructura, para establecer conexiones y para formalizar los argumentos matemáticos (Arcavi, 1994; Gómez, 1995).

Tras el cambio que se produjo en 1960 con respecto a la enseñanza de las matemáticas, ésta se dividió en distintas ramas, lo que conllevó a que la aritmética se desligara del álgebra, siendo esta última considerada como la generalización de la primera. En palabras de Drijvers y Hendricus (2003), hay una relación recíproca entre ambas: “el álgebra tiene sus raíces en la aritmética, mientras que la aritmética tiene muchas particularidades para simbolizar, generalizar y razonar algebraicamente” (p. 44).

Hewitt (1998) y Manson, Graham y Johnston-Wilder (2005) plantean la relación entre el álgebra y la aritmética desde un punto de vista opuesto. Pues para ellos, el álgebra está condicionada por la aritmética: “la aritmética necesita del pensamiento algebraico” (Manson et al., 2005, p.59), “la aritmética es imposible sin el álgebra” (Hewitt, 1988, p.19). Esta percepción se debe a que la aritmética no se basa en la mera memorización de los algoritmos para poder realizar cálculos, sino en el aprendizaje de los métodos. Así pues, en el aprendizaje de la aritmética los estudiantes deben interiorizar las generalizaciones que se encuentran implícitas, relativas a la estructura aritmética.

La aritmética se sitúa antes que el álgebra en el currículo escolar, al considerarse que la generalización de la aritmética es un componente fundamental para el álgebra. Esta idea es defendida alegando que el álgebra necesita de un pensamiento formal mientras que la aritmética no, y dado que dicho pensamiento se desarrolla posteriormente, el álgebra debe iniciarse después de la aritmética (Lins y Kaput, 2004).

Las diferencias que hemos considerado más relevantes entre la aritmética y el álgebra escolar se recogen en la tabla 1, las cuales han sido detalladas en los estudios de Kieran (1989, 1992), Linchevsky (1995), Van Ameron (2002) y Rojano (2002), entre otros.

Tabla 2. Principales diferencias entre la aritmética y el álgebra escolar.

Aritmética	Álgebra
Objetivo general: encontrar una solución numérica.	Objetivo general: generalizar y simbolizar métodos de resolución de problemas.
Generalización de situaciones relativas a números concretos.	Generalización de relaciones entre números, reducción a la uniformidad.
Manipulación de números fijos.	Manipulación de variables.
Las simbolizaciones son etiquetas de medidas o abreviaturas de un objeto.	Los símbolos son variables o incógnitas.
Las expresiones simbólicas representan procesos.	Las expresiones simbólicas son consideradas como productos y procesos.
Las operaciones se refieren a acciones.	Las operaciones son objetos autónomos.
Las operaciones son consideradas de forma unitaria y binaria.	Predomina una visión unitaria de las operaciones al ser asignado el signo operacional al término al que acompaña.
El signo igual anuncia un resultado.	El signo igual representa equivalencia.
Razonamiento con cantidades conocidas.	Razonamientos con cantidades desconocidas.
Modo unidireccional de procesar la información	Modo bidireccional de procesar la información.
Problemas lineales con una incógnita.	Problemas con múltiples incógnitas.

Fuente: Molina (2006, p.36)

Problemáticas asociadas en el aprendizaje del álgebra

Las dificultades asociadas al razonamiento algebraico son analizadas en distintas investigaciones (Janvier, 1987; Kieran y Filloy, 1989; Kieran, 1992; Duval ,1993; Kaput, 1999;

Chevallard, Bosch y Gascón, 1997; Bolea, Bosch y Gascón, 2001; Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007) que vamos a resumir de manera breve desde los hitos más reseñables.

Desde la rama de la psicología, Kieran y Filloy (1989) han identificado las causas que repercuten sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra, en el que ponen de manifiesto los efectos adversos al enfocar el álgebra como aritmética generalizada. En lo referente al punto de vista lingüístico analizado por Janvier (1987), Kaput (1999) y Duval (1993), que consideran al lenguaje algebraico como el lenguaje elemental de las matemáticas, centrado en el interés de alcanzar los conceptos matemáticos en el momento que haya una armonización, sin discordancias, entre las distintas representaciones del objeto matemático a tratar. Las indagaciones de Chevallard, Bosch y Gascón (1997), Bolea, Bosch y Gascón (2001), Godino (2002), Godino, Batanero y Font (2007), desde el punto de vista antropológico y ontosemiótico, adoptan un enfoque pragmático, enfocado en el estudio de los objetos matemáticos tanto a nivel institucional como personal, analizando los resultados obtenidos de la transposición didáctica escolar y tratando de incorporar los aspectos sintácticos, semánticos, pragmáticos y socioculturales.

Como aspectos específicos del desarrollo educativo del Álgebra hay que destacar los estudios realizados por Brousseau (1983), Palarea y Socas (1994), Socas (1997), Kieran (1997), Pizón y Gallardo (2000), Vicario (2002) y Cajaraville, Cachafeiro, Fernández, Ferro y Salinas (2012), en donde se intentan encontrar respuestas una cuestión: ¿Qué pueden llevar a cabo y qué no los discentes en su iniciación al álgebra? Esta idea se puede observar en las siguientes consideraciones.

Los obstáculos epistemológicos y didácticos que originan una serie de equivocaciones metódicas y perseverantes que deben vencerse para conseguir nuevos conocimientos (Brousseau, 1983). Palarea y Socas (1994) están identificados con tres tipos de errores: (a) obstáculos cognitivos; (b) errores del álgebra que están en la aritmética; y (c) errores del álgebra debidos a características propias del lenguaje algebraico. También Socas (1997), describe tres tipos de errores: (i) aquellos que tienen origen en un obstáculo; (ii) los que tienen origen en ausencia de sentido; y (iii) cuyo origen radica en actitudes afectivas y emocionales. En las investigaciones de Kieran (1997), indica que en los problemas de álgebra elemental, en los que se enseñan la letra como un valor desconocido que se debe calcular, las cuestiones conceptuales de los estudiantes se centran en: (α) entender las letras como elementos que se utilizan para representar incógnitas, números generalizados y relaciones entre cantidades; (β) reproducir los problemas a modelos algebraicos, basados en ecuaciones que simbolizan las cantidades desconocidas y los otros datos del problema, según relaciones explicitas o implícitas en el enunciado del mismo; y (ϒ) resolver dichas ecuaciones. Estos problemas conceptuales generan dificultades de aprendizaje en los estudiantes.

El álgebra y el código alfanumérico, como lenguaje específico

Según Godino y Font (2004) y Cajaraville et al. (2012) las primeras experiencias con el álgebra están relacionadas con la aritmética generalizada, las cuales son importantes para la comprensión progresiva del lenguaje algebraico, y el concepto matemático que hace posible esta generalización es el de variable. Así, el uso de las letras en matemáticas parece ser inevitable, la simbología literal es un recurso potente que facilita la resolución de problemas. Sin embargo, a las letras suele darse diferentes usos. Küchemann (1980) pone de manifiesto que la interpretación y comprensión del uso de las letras en contexto algebraico progresa mediante seis etapas, que constituye un referente para la categorización y definición del uso de las letras propuesta, analizada por distintos autores (Enfedaque, 1990; Grupo Azarquiel, 1991; Ursini y Trigueros, 1998; Usiskin, 1999; Rojas, Rodríguez, Romero, Castillo y Mora, 1999; y Kieran, 2006). En la tabla 3 podemos encontrar una síntesis del uso de las letras.

Tabla 3. Etapas del uso de las letras según Küchemann

La letra evaluada. A la letra se le asigna un valor numérico en vez de considerarla como un valor desconocido. Por ejemplo, si $a + b = 10, entonces\ a + b + c = ¿?$
La letra no usada. A la letra no se le da un significado concreto. Por ejemplo, multiplica 5n por la expresión n+6.
La letra como objeto. A la letra se le asigna un nombre para un objeto. Por ejemplo, un plátano cuesta 30 céntimos de euro, y el melocotón cuesta 45 céntimos de euro. Si “x” es el número de plátanos e “y” es el número de melocotones ¿Qué simboliza la expresión 12x+8y?
La letra como incógnita. La letra se entiende como un número específico pero desconocido y operan creyendo que es así, a pesar de que no es lo que se está pidiendo en el ejercicio. Por ejemplo, ¿Cuándo es verdadera la expresión “E+F+G= E+T+G”? Señala la respuesta correcta: siempre; nunca; a veces; cuando…
La letra como número generalizado. La letra puede tener varios valores, no tiene porqué ser único. Por ejemplo, Si v+w=10 y w<v. ¿Qué podrías decir de w?

La letra como variable. La letra representa un rango de valores y se puede establecer una relación entre diferentes variables. Por ejemplo, si A+B=5 ¿Qué le ocurre a A si B se incrementa en 7?
La letra como relación funcional. $f(x)= x^2 \cdot tg(x)$, aquí se puede apreciar que "x" varía en un determinado conjunto de números y que, para cada valor de x, a f(x) se le asigna el valor correspondiente mediante la expresión $x^2 \cdot tg(x)$.

Fuente: Cajaraville et al. (2012, p. 25)

La importancia que tiene lograr la comprensión en la generalización que desempeña la letra como variable es una tarea ardua para muchos estudiantes, tras la observación de numerosos errores (conceptuales, procedimentales y estructurales) que cometen los estudiantes, y que han sido puestos de manifiesto reflejados en diferentes investigaciones y documentos curriculares de amplia difusión internacional como, por ejemplo, Küchemann (1980), Furinghetti y Paula (1994), Schoenfeld y Arcavi (1999), Usiskin (1999), NCTM (2000), Bardini, Radford y Sabena (2005), Trigueros y Ursini (2006) entre otros.

El signo igual en el contexto algebraico

El signo igual juega un papel fundamental en el desarrollo del pensamiento algebraico. Es un símbolo que relaciona la equivalencia y la sustitución entre los dos lados de la ecuación. El hecho de que un niño comprenda que la expresión 5+3= 2+6 es correcta, ya que ambas partes son iguales, es una buena señal, pues posee un conocimiento adecuado de álgebra y aritmética.

Décadas de investigación han demostrado que los escolares suelen tener bastante dificultad para entender el signo igual (Kieran, 1981; Sfard y Linchevski, 1994; Linchevski y Herscovics, 1996; Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg y Stephens, 2011; Burgell y Ochoviet, 2015).

Molina (2006) y Molina et al. (2009) especifican once conceptos diferentes del signo igual, en los que se puede diferenciar aquellos que son reconocidos y utilizados por la comunidad matemática, los propios de la matemática escolar y los que aparecen mediante el uso y deducciones de los estudiantes, que pueden ser matemáticamente correctos o no.

En la tabla 4 que se presenta a continuación exponemos los significados con los ejemplos que proponen los autores:

Tabla 4. Interpretaciones del signo igual

1. **Propuesta de actividad.** Refiere al uso del signo en expresiones incompletas, con una cadena de números o símbolos vinculados por símbolos operacionales a la

izquierda del signo de igual y un espacio vacío a la derecha de este. Ejemplos: $16:3 =\ ; x(x+1) - 3x(x+5) =$.

2. **Operador (u operacional).** Refiere al uso del signo como un símbolo que separa una cadena o secuencia de operaciones, que se sitúan a la izquierda, y su resultado, que se dispone a la derecha. Ejemplos: $4 \times 5 = 20;\ x(x-2) + 3x^2 = 4x^2 - 2x$.

   Si bien Molina *et al.* (2009) proponen un ejemplo algebraico en donde a la derecha del signo de igual hay más de un término, en el contexto de la aritmética esto no ocurre, la respuesta es un único número escrito a la derecha del signo de igual.

3. **Expresión de una acción.** Éste es un significado bidireccional del signo, que extiende el significado de <u>operador</u> recién reseñado. Aquí la cadena o secuencia de operaciones va indistintamente a la izquierda o a la derecha, y el resultado, en el otro miembro. Ejemplos : $2x = x(x-2) - x^2 + 4x;\ \ 24 = 12 + 12;\ \ 12 + 12 = 24$.

4. **Separador**. Este uso, matemáticamente incorrecto, se lo dan algunos alumnos al utilizarlo en contextos algebraicos como separador de los pasos realizados en la resolución de una actividad. Ejemplo: $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x} = x^2 + 1 = x = x^2 - x + 1 = 0$. En el ejemplo los signos de igual que cumplen este papel son el segundo y el cuarto de izquierda a derecha.

5. **Expresión de una equivalencia**. Refiere al uso del signo para relacionar dos representaciones diferentes de un mismo objeto matemático.

   5.a) **Equivalencia numérica**. Indica el mismo valor numérico en las expresiones aritméticas que se encuentran en ambos miembros. Ejemplos: $4 + 5 = 3 + 6; 2\sqrt{3} = \sqrt{12}$.

   5.b) **Equivalencia simbólica**. Indica el mismo valor numérico de dos expresiones algebraicas para todos los valores de las variables. Ejemplos: $x^2 + 2x = x(x+2); a + b = b + a$.

   5.c) **Identidad estricta**. Aquí las expresiones a ambos lados representan el mismo objeto matemático con el mismo representante. Ejemplos: $3 = 3;\ x = x;\ x + 5 = x + 5$

5.d) **Equivalencia por definición o por notación**. Indica la equivalencia de dos expresiones numéricas o algebraicas por definición o por el significado de la notación utilizada. Ejemplos: $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$; $100cm = 1m$.

6. **Expresión de una equivalencia condicional (ecuación).** Se encuentra en el contexto del álgebra cuando la equivalencia expresada por el signo de igual solo es cierta para algún o algunos valores de la o las variables, pudiendo inclusive no ser cierta para ningún valor. Ejemplo: $x^2 + 4x = 5x - 6$.

7. **Definición de un objeto matemático.** Se utiliza para definir o asignar un nombre a una función u otro objeto matemático. Ejemplos: $a^0 = 1$; $f(x) = 2x + 3$.

8. **Expresión de una relación funcional o de dependencia**. Refiere al uso para indicar una relación o dependencia entre variables o parámetros. Ejemplos: $y = 3x + 2$; $l = 2\pi r$.

9. **Indicador de cierta conexión o correspondencia.** Significado impreciso que se refiere a su uso entre objetos no matemáticos o de distinta naturaleza, como por ejemplo entre imágenes o figuras y números, o entre expresiones matemáticas y no matemáticas.

   Ejemplo: ⌚ + ⌚ + ⌚ = 3.

10. **Aproximación**. Este significado corresponde al uso del signo para relacionar una expresión aritmética y una aproximación de su valor numérico.

    Ejemplo: $\frac{1}{3} = 0{,}33$

11. **Asignación de un valor numérico**. El signo asigna un valor numérico a un símbolo. Ejemplo: $si\ x = 4\ ¿cual\ es\ el\ valor\ de\ x^2 - 5?$

Fuente: Molina et al. (2009, pp. 346-348)

Molina et al. (2009) refieren que el concepto de expresión de una equivalencia es el único que hace alusión a una relación que verifica las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva, y que en el resto, la relación no es reflexiva, y a veces, tampoco transitiva. También destacan que, en al menos seis de los significados que se muestran en la tabla 4, el signo igual se utiliza en sentido unidireccional.

El aprendizaje con material manipulativo. *Algebra Tiles*

Somos conscientes que la educación actual necesita una reestructuración, pues estamos en un mundo en constante cambio y evolución, y los tiempos actuales nos demandan unas nuevas estrategias y metodologías en la enseñanza. Pero sabemos que hay docentes que se resisten al cambio, es decir, utilizan la misma fórmula de siempre, teniendo ellos el control y siendo los estudiantes meros espectadores. Nadie sabe a ciencia cierta cómo debería de ser, de hecho, no hay un modelo único, pero sí un principio claro: docentes y discentes aprendiendo a la vez.

En la enseñanza de las matemáticas, una de las grandes dificultades con las que nos encontramos es la interiorización de procesos y la abstracción de los contenidos que se trabaja. De acuerdo con esto, se han integrado al aula recursos, que Godino, Batanero y Font (2003, citado en Uicab, 2009, p. 1010) han clasificado en dos grupos:

> Ayudas al estudio (libros, tutoriales, etc.) y materiales manipulativos, estos últimos enfocados en apoyar y potenciar el razonamiento matemático: manipulativos tangibles (concretos) los cuales propician un marco para la resolución de problemas, discusión, comunicación y reflexión, y manipulativos gráfico - textuales - verbales, en los cuales participan la percepción visual y/o auditiva; graficas, símbolos, tablas, etc.

Analizaremos el potencial del material manipulativo *Algebra Tiles* para abordar situaciones de enseñanza referidas al álgebra elemental, contenido relevante de la educación básica. Dicho material consta de varios cuadrados grandes y pequeños y rectángulos de ciertas dimensiones, como se puede observar en la figura 1.

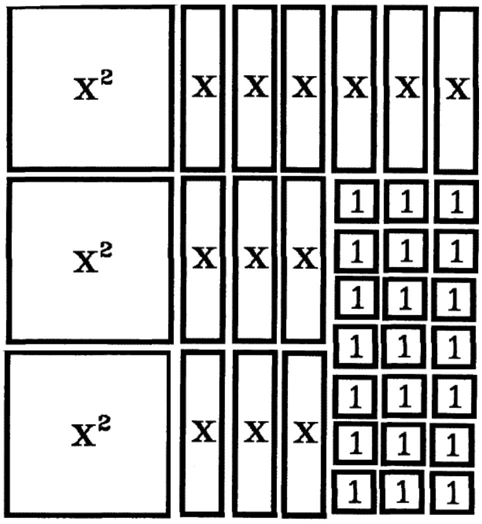


Figura 1. Piezas del Algebra Tiles

Los materiales por sí solos no surten efecto, el poder de quien los utiliza para un fin es lo que los hace valiosos.

Por ello, tenemos que tener en cuenta los siguientes aspectos (Mancera,1998):

- Observar constantemente en lo que trabajan los estudiantes.
- Programar cuidadosamente cada sesión con los materiales.
- Prestar atención a los planteamientos de los estudiantes. Hay que escucharlos con detenimiento lo que plantean porque es lo que nos permitirá interpretar adecuadamente sus dudas o reflexiones.
- Permitir que los estudiantes se apoyen o corrijan unos a otros. En definitiva, abandonar la posición del docente autoritario y totalmente directivo.
- Facilitar la participación de los estudiantes, sin importar si se equivocan o proceden de manera correcta, pues el docente corregirá lo necesario.

La utilización de cualquier tipo de materiales significa un cambio en la enseñanza, aunque su uso no garantiza un éxito por sí solo, como mencionamos anteriormente. Son recursos que apoyan la actividad docente, pero no son el sustituto de nada.

Con este trabajo se pretende mostrar algunos elementos que sirvan para el desarrollo conceptual en el álgebra y a su vez como punto de partida para favorecer el manejo operativo.

> Es mejor contar con recursos para que los alumnos construyan algunos elementos por sí mismos y den sentido a lo que se les enseña, pues ante el olvido irremediable contarán con estrategias para reconstruir un proceso o un concepto, sabemos que no podemos confiar sólo en la memoria. Si alguien no recuerda cierta fórmula o procedimiento, pero sabe bien a lo que refiere, podrá generar ideas para utilizar procedimientos alternos o resolver satisfactoriamente las situaciones que enfrenta, lo cual puede propiciarse con el uso de los materiales manipulativos (Mancera, 1998, p.5)

Veamos cómo se resuelve la ecuación lineal $x - (-)4 = 2$ en la figura 2 con *Algebra Tiles*.

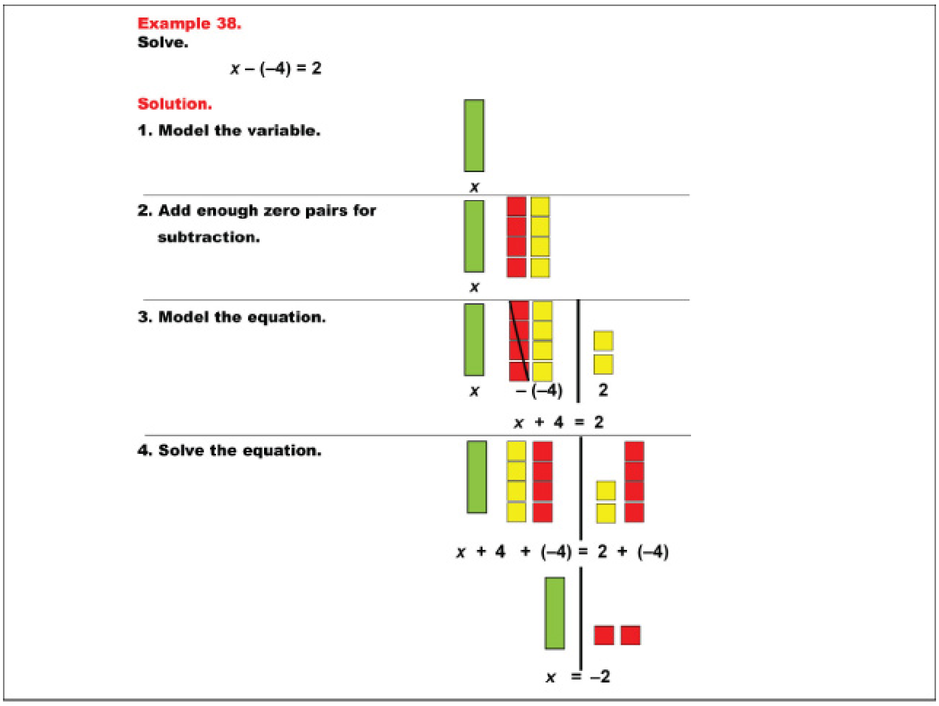


Figura 2. Resolver x-(-4) =2 mediante el material Algebra Tiles. Recuperado de: https://media4math.com/library/math-example-algebra-tiles-example-38.

Enfoque competencial.

Los estándares y expectativas específicos referentes a los distintos bloques de contenidos y procesos (NCTM, 2003) junto con los contenidos matemáticos, constituyen el conjunto de conocimientos matemáticos que favorecen la competencia matemática.

Los procesos matemáticos, de acuerdo con Alsina (2012), destacan las formas de adquisición y uso del conocimiento matemático: pensar, razonar, modelizar, etc.

Iniciar el enfoque competencial desde las edades más tempranas, es especialmente significativo, pues de esta manera progresan los conocimientos matemáticos paulatinamente y crece la habilidad para adaptar conceptos y destrezas con más fluidez en distintos ámbitos de su vida (Alsina,2016).

Esta postura, destaca la importancia y la necesidad de entender las matemáticas: "en este mundo cambiante, aquellos que comprendan y puedan hacer uso de las matemáticas tendrán cada vez más oportunidades y opciones para determinar su futuro. La competencia matemática abre puertas a un porvenir productivo; su carencia las mantiene cerradas" (NCTM, 2003, p. 5). Desde este enfoque, Alsina (2010) sugiere que para fomentar el progreso de la competencia matemática es necesario partir de contextos de aprendizaje significativo y apropiados a las necesidades de los estudiantes. Debido a ello, Alsina (2016), hace una comparación con la pirámide de la alimentación, y desarrolla la "Pirámide de la Educación Matemática" indicando el tipo de recursos necesarios para desarrollar el pensamiento matemático y su frecuencia de uso más recomendable (Figura 3). Y es que como en la pirámide alimenticia, no prescinde de ningún recurso, sólo comunica sobre la limitación de uso, por eso es una herramienta útil para aquellos docentes que quieran hacer de su metodología una garantía de educación matemática.

Figura 3. Pirámide de la Educación Matemática. Fuente: Alsina (2016, p. 13)

En el cimiento están todos los medios que requieren los estudiantes, los que deberían "consumir" diariamente para progresar en la competencia matemática: las situaciones problemáticas, los retos diarios, la observación y el análisis matemático, la manipulación con diferentes materiales, y los juegos educativos. A continuación, emergen los que deben "tomarse" a menudo durante la semana, de manera alterna, correspondientes a los recursos tecnológicos y literarios. Por último, en la cumbre, aparecen aquellos que deberían usarse de manera ocasional, específicamente los libros de texto. No obstante, en la práctica diaria de algunos docentes este organigrama está invertido, lo que conlleva a aprendizajes poco significativos, la falta de interés, comprensión, etc. Por lo que creemos que es necesario reflexionar sobre el tipo de actividades para que los estudiantes desarrollen su competencia matemática (Alsina, 2016).

Es por ello, que propone las siguientes fases (Tabla 5) para el diseño de las actividades matemáticas competenciales en el aula:

Tabla 5. Fases para el diseño de las actividades matemáticas competenciales

Fase 1: Matematización del contexto de enseñanza-aprendizaje. Consiste en analizar todos los contenidos matemáticos (números y operaciones, álgebra, geometría, medida

y análisis de datos y probabilidad) que pueden trabajarse en el contexto de aprendizaje, y establecer a través de qué procesos van a trabajarse.

Fase 2. Trabajo previo en el aula. Cualquier actividad formativa requiere partir de los conocimientos previos de los alumnos, puesto que si la distancia entre lo que el estudiante sabe y lo que se planifica que aprenda es demasiado grande, el aprendizaje difícilmente va a producirse. Y en el caso que se produzca, será un aprendizaje desconectado del resto, puesto que no será posible realizar ningún tipo de conexión.

Desde este punto de vista, una vez determinado el contexto de enseñanza-aprendizaje se inicia un diálogo con los estudiantes para recoger sus conocimientos previos y experiencias.

Existen diversos recursos posibles para hacer emergen los conocimientos previos, aunque uno de los más adecuados son las buenas preguntas. En los procesos de interacción, diálogo y negociación, las buenas preguntas se erigen como uno de los instrumentos de mediación más idóneos, ya que pueden hacer avanzar desde unos primeros niveles de concienciación sobre lo que uno ya sabe o es capaz de hacer hacia niveles más superiores (Mercer, 2001).

En el marco de este diálogo, entre todos se pacta el material para trabajar en contexto y documentar el trabajo que va a realizarse durante el transcurso de la actividad: una cámara digital para poder documentar en contexto, o bien otros materiales que sean necesarios para llevar a cabo la actividad: una cinta métrica, una calculadora, una libreta para anotar los descubrimientos o para representar una idea matemática, etc.

Fase 3: Trabajo en contexto En esta fase es cuando se desarrolla la actividad matemática competencial en el contexto de enseñanza-aprendizaje establecido, y la práctica docente del maestro debería favorecer que los alumnos usen y comprendan las matemáticas en dicho contexto. Para ello, como se detallará en el apartado correspondiente a la gestión de actividades matemáticas competenciales, el maestro debería provocar situaciones que inviten a los alumnos a pensar, indagar, argumentar, razonar, descubrir, comprobar, comunicar, conectar, modelar o bien representar ideas matemáticas. Así, pues, durante la realización de la actividad competencial es recomendable que el docente intervenga haciendo preguntas, más que dando explicaciones.

Fase 4. Trabajo posterior en el aula. Esta fase es fundamental para que los estudiantes compartan los conocimientos adquiridos en contexto, consiguiendo de esta forma

fomentar la co-construcción de nuevo conocimiento matemático a través del andamiaje colectivo, así como la consolidación de aprendizajes ya adquiridos previamente.
Para lograr estas finalidades, de nuevo es aconsejable establecer un diálogo con los estudiantes para que comuniquen lo que han aprendido, procurando en todo momento que utilicen un lenguaje matemático adecuado. Además, para interiorizar los aprendizajes adquiridos en contexto, puede resultar muy eficaz que los alumnos representen gráficamente el trabajo realizado.
Fase 5. Formalización de los aprendizajes adquiridos. Una de las finalidades de las matemáticas es representar de manera simbólica las situaciones concretas de la realidad que nos rodea. Por esta razón, una actividad matemática competencial debería finalizar, a medida que avanzan las posibilidades de representación de los estudiantes, con la formalización de los aprendizajes matemáticos adquiridos.
Desde esta perspectiva, los estudiantes deben ir adquiriendo progresivamente herramientas que les permitan formalizar los aprendizajes a través del lenguaje escrito en general, y el lenguaje algebraico en particular.

Fuente: Alsina (2016, pp. 14-16)

Tras el desarrollo de las fases, podemos ver que se corresponden a una secuencia continua en un flujo circular (Figura 4). Por lo que, una vez finalizada la actividad competencial, el estudiante estará capacitado de un nuevo aprendizaje que le será de utilidad para emprender un nuevo ciclo. Y desde esta nueva secuencia se programarán otros aprendizajes para que, “desde lo concreto, el estudiante pueda conectar con lo formal interiorizado en una actividad competencial anterior, aumentando de esta forma la comprensión del conocimiento matemático” (Alsina, 2016, p.16).

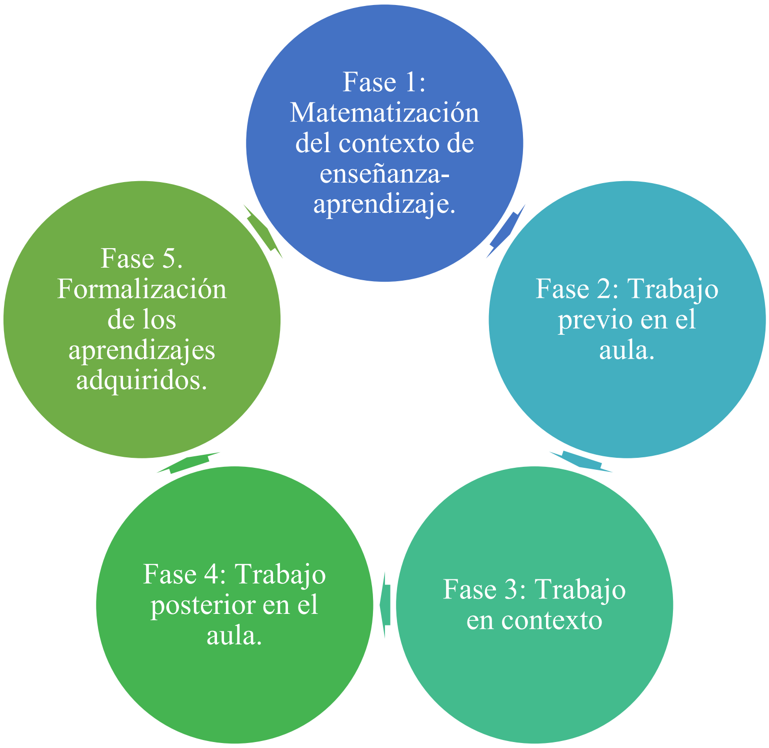


Figura 4. Fases de una actividad competencial

Para este tipo de gestión se requiere de un docente que participe activamente en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Los contenidos algebraicos. *Early Algebra*

Kieran, Pang, Schifter y Fong (2016) hacen una investigación en un campo relativamente nuevo de estudio y práctica docente denominada *early algebra,* enfocándose tanto en la naturaleza del pensamiento algebraico como en las formas en que este pensamiento puede desarrollarse en la escuela primaria. Dicho estudio se centra en los estudiantes de entre 6 y 12 años, y aunque nuestro trabajo se centra en edades posteriores consideramos que el enfoque que dan estas teorías de aprendizaje es de especial interés, ya que podría ser una manera de evitar obstáculos en el estudiante el hecho que el docente de Secundaria las conozca.

La comunidad *early algebra*, sostiene la necesidad de organizar el currículo de las matemáticas como un continuo epistemológico, antes que pasar de la aritmética al álgebra sin ningún sentido. Esto hace que, en 1996 Kieran proponga un modelo de la actividad algebraica, desarrollada en tres niveles descritos en la Tabla 6.

Tabla 6. Modelo propuesto por Kieran de la actividad algebraica

Nivel 1. Actividad matemática que involucra objetos y expresiones algebraicas. Por ejemplo, resolución de problemas que precisen ecuaciones, patrones numéricos geométricos, relaciones numéricas.
Nivel 2. Actividad que suponga transformaciones de objetos basadas en reglas. Por ejemplo, manipulación de polinomios, factorización o expansión, transformación de ecuaciones y, en general, progreso mediante expresiones equivalentes.
Nivel 3. Actividad en la que el álgebra es una herramienta al servicio de otro propósito. Por ejemplo, en la modelización, el estudio del cambio en un contexto, el análisis de relaciones, la justificación de reglas.

Fuente: Muñoz, Arnal, Beltrán, Callejo y Carrillo (2017, p.21).

Estos niveles estructuran los usos y concretan los diferentes enfoques teóricos y prácticos en álgebra. Por otra parte, el tercer nivel es más que una manipulación simbólica, siendo el precedente de las actividades algebraicas sucesivas.

> Las actividades globales de meta-nivel de álgebra pueden ser consideradas no solo como parte de la actividad algebraica simbólico-literal, sino también como precursoras de actividades generacionales y transformacionales que serán puestas en juego más adelante (Kieran, 2004, p.148).

Marco Metodológico

Debido a que el álgebra estudia y pone en conocimiento las ideas matemáticas utilizando notación simbólica, en ocasiones los estudiantes la encuentran abstracta y desconectada del mundo real.

Para ello, usaremos material manipulativo dentro del aula. En el marco teórico ya hablamos de una de las innovaciones en la metodología era el utilizar dicho recurso, y hablamos sobre el *Algebra Tiles*, pero nosotros hemos querido que sean los propios estudiantes los que elaborasen los cuadrados y rectángulos que ya nos proporcionaba *Algebra Tiles*, pues para su construcción ya debíamos ir introduciendo conceptos que desconocen y creímos oportuno iniciarlo desde un principio. El material manipulativo que llevamos al aula fueron los cubos conectores, que se clasifican como un recurso manipulativo tangible, siguiendo la agrupación de Godino, Batanero y Font (2003). La puesta en práctica de dicho material se hizo con el propósito de aportar procesos de abstracción, y así el alumnado pudiese hacer el paso de lo tangible a lo abstracto y por esa razón, determinaran el significado de conceptos matemáticos, sin querer propiciar una dependencia del material. Buscamos que el aprendiz alcance las expresiones polinómicas, en una o en dos variables, cómo áreas que pueden representarse con los cubos, en los que el alumnado ha construido previamente cuadrados y rectángulos, y por medio de su unión y la posterior estructura (etapa que corresponde a la manipulación directa del material), se pueda deducir que, al encontrar la longitud de los lados del cuadrado o rectángulo resultante, se está realizando un proceso algebraico usando nociones de área (etapa de transición geometría-álgebra), y que este desarrollo corresponde a la factorización de un polinomio (etapa de abstracción).

Con el fin de proporcionar experiencias nuevas de aprendizaje para que los estudiantes puedan usar y desarrollar la comprensión de los conceptos algebraicos, los docentes deben de tener en cuenta los errores más habituales que surgen en el alumnado cuando inicia el álgebra. Por ello, en el marco teórico se detallaron los obstáculos y las dificultades que entrañan a los estudiantes, y de esta manera poder desarrollar una propuesta, que al tenerlas en cuenta, sean más eficaces para una mayor utilidad.

Contexto

El Centro donde se desarrolló la propuesta didáctica, se encuentra en el distrito VII de Alcalá de Henares. Esta ciudad, situada a 30 km. al Este de Madrid, dentro de una comarca industrializada denominada "Corredor del Henares", tiene actualmente unos 200.000 habitantes.

La zona donde está ubicado hay gran cantidad de viviendas de nueva construcción, tanto bloques como viviendas unifamiliares, siendo el nivel socioeconómico de sus ocupantes de tipo medio.

La práctica se llevó a cabo en tres aulas distintas de 2º de ESO. Para poner en contexto al lector, se exponen las diferencias significativas de estos grupos:

- En el primer grupo, tenemos un total de 25 estudiantes, uno de ellos está considerado de Altas Capacidades y otro de hiperactividad. En la primera evaluación hubo un 64% de aprobados, mientras que en la segunda aumentó a un 84%. En esta clase hay una gran competitividad entre ellos, por lo que nos sorprendió que, a la hora de trabajar en grupo, todos se ayudaran y no hubiera ningún tipo de rivalidad entre sí.
- En el segundo grupo, con un total de 30 alumnos. En la primera evaluación hubo un 93% de aprobados, mientras que en la segunda disminuyó a un 87%. El hecho de

trabajar en grupos en esta clase resultó un poco más complicado, pues no pudimos atender con celeridad a todos ellos y hubo desequilibrios internos entre sí.

- El tercer grupo, tenemos un total de 24 alumnos, de los que 2 de ellos están diagnosticados con Trastorno Espectro Autista (TEA), otros 2 son Alumnos con Necesidades Educativas Especiales (ACNEE) y otros 7 que tienen asignaturas pendientes de 1º de ESO. En la primera evaluación hubo un 84% de aprobados, mientras que en la segunda disminuyó a un 44%. En este grupo debido a la característica del alumnado nos dimos cuenta de que hay estudiantes con estas edades que manifiestan una profunda tristeza, por lo que nos llegamos a cuestionar si la falta de motivación más que cuestión académica es debido a un hecho que por lo general se le escapa al docente. Aun así, conseguimos la implicación y motivación en gran número de ellos.

Cronograma

Se presenta a continuación, el cronograma con la secuencia de tareas tal como se implementó, en el curso 2018-19.

	04-mar	05-mar	06-mar	07-mar	11-mar	12-mar	13-mar
Presentación y explicación del material							
Interiorizar las reglas para manejar los cubos conectores mediante la exploración de los mismos.							
Expresar como producto de factores irreducibles un polinomio dado							
Ejercicios de consolidación de los conceptos adquiridos							
Prueba final							

El enfoque que llevamos a cabo en las aulas fue el competencial (Alsina, 2016), en el marco teórico explicamos su desarrollo y las fases que lleva a cabo. Si observamos la figura 3, el enfoque por competencias requiere de conceptos y procesos adquiridos por los estudiantes a lo largo de su etapa escolar, para poder ir construyendo los nuevos.

Por ejemplo, antes de memorizar las tablas de multiplicar, los estudiantes conocen el proceso. "Ellos tienen que saber qué están haciendo. Deben saber que las tablas son una agrupación de elementos, una suma reiterada que les va a dar un resultado y no un número mágico" (Sanhueza, 2011).

Vamos a exponer lo que hicimos en cada fase que compone el enfoque.

En el caso de la primera fase, los conocimientos que íbamos a exponer eran los algebraicos, por lo que consideramos indispensable pasar de un contacto con situaciones en las que el estudiante puede realizar indagaciones y formular sus propias ideas sobre lo que está sucediendo, antes de introducir la simbolización y el manejo abstracto.

En la segunda fase mantuvimos un dialogo con los estudiantes para conocer los conceptos que ya tenían al respecto, y en el caso de que dichos conceptos no estuviesen consolidados, procederíamos a averiguar el obstáculo que presentaban. Se les comunicó que durante seis sesiones trabajaríamos con material manipulativo, y que en todo momento ellos iban a ser los protagonistas de las clases.

En la tercera fase, les dimos al alumnado el material manipulativo, en el que un principio tenía que indagar ellos mismos, para luego entregarles una serie de instrucciones a fin de un manejo óptimo del material, además de una serie de actividades que deberían realizar en grupos de cuatro.

En la cuarta fase, para lograr que interiorizasen el aprendizaje adquirido, pasamos progresivamente, a que los estudiantes hicieran en sus propios cuadernos las representaciones gráficas. Una vez que ninguno de ellos necesitó el material para poderlo visualizar mejor, pasamos a realizar unas actividades y así consolidar el nuevo procedimiento.

En la quinta y última fase, los estudiantes iban adquiriendo progresivamente herramientas que les iban permitan formalizar los aprendizajes a través del lenguaje algebraico, y así poder dar respuesta a una situación o problema planteado mediante el uso de la matemática pura.

Propuesta

Procedemos a detallar el enfoque competencial para la factorización de polinomios de segundo grado.

Lo primero que hicimos en las aulas fue organizar grupos de cuatro estudiantes, pues creemos que, mediante la colaboración, las ayudas pedagógicas facilitadas al alumnado son más beneficiosas.

Presentación y manipulación con los cubos conectores. Primeros conceptos que adquieren.

El objetivo de esta etapa es de interiorizar las reglas para poder hacer un uso correcto del material mediante la exploración con las mismas.

Deben construir dos cuadrados de lados “a” y “b”, dos rectángulos cuya altura va a ser la unidad, y las bases “a” y “b”, y otro de altura “b” y de base “a”. Se toma el lado del cubo como la unidad.

La figura 5 que se muestra a continuación fue lo que se les escribió en la pizarra para que lo construyesen con el fin de que se diesen cuenta que “a” y “b” tenían que tener una relación, para que los rectángulos y los cuadrados no se solapasen entre ellos. También se puede observar que mediante los cubos conectores estamos construyendo los elementos del *Algebra Tiles*, epígrafe del marco teórico.

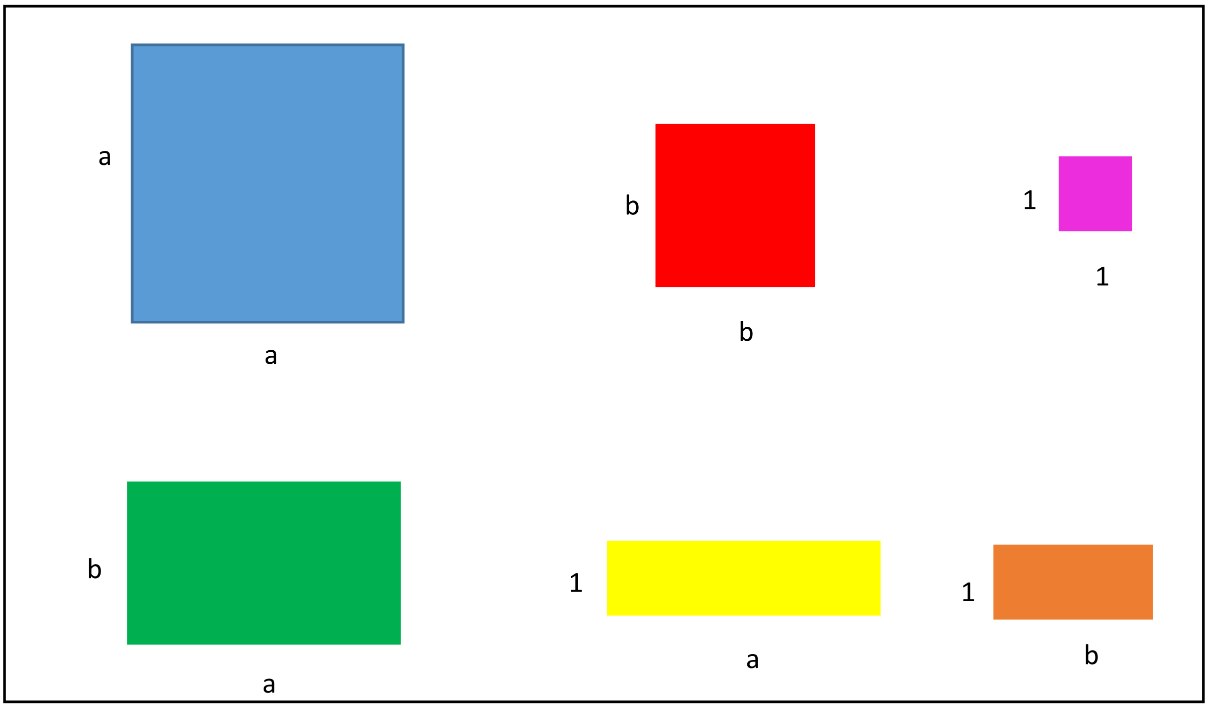


Figura 5. Construcciones con los cubos conectores

Es por ello, que se les pidió que primero tomasen a=6 y b=2, para que viesen que con esos números las construcciones de los cuadrados y rectángulos, la superficie de área ab era cubierta por tres cuadrados de lado b.

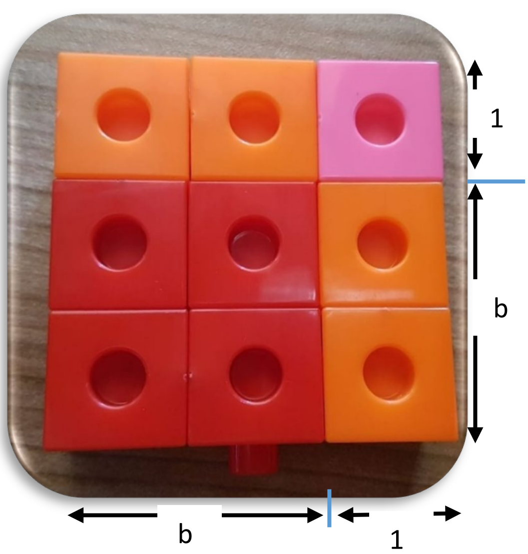
En general, se dieron cuenta rápidamente que “a” y “b” no debían de tener ningún divisor en común. Por ello, se les introdujo el concepto de “primos relativos”.

> Definición de primo relativo: Sean a y b dos números enteros, se dice que son primos relativos (o primos entre sí) si no tienen más divisor común que la unidad (Euclides, trad. en 1956).

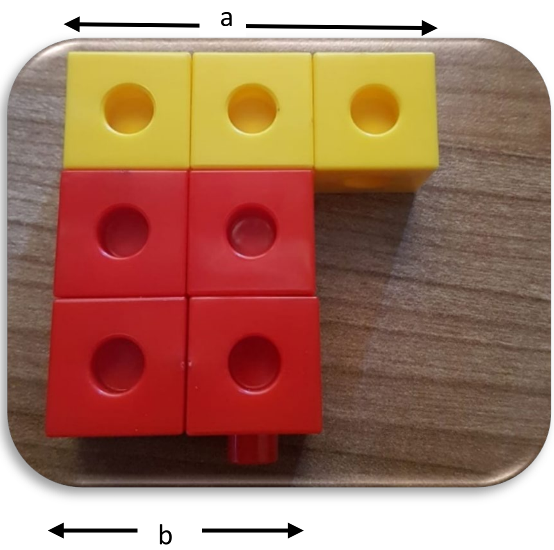
Posteriormente se pasó a darles en una hoja las instrucciones que debían saber para poder manejarlo, que se expone a continuación.

Uniones Posibles (Representación de la suma)

Solo se pueden colocar las figuras de manera sucesiva, cuando los lados compartidos sean de la misma medida, como se muestra en la figura 6.



Forma Correcta



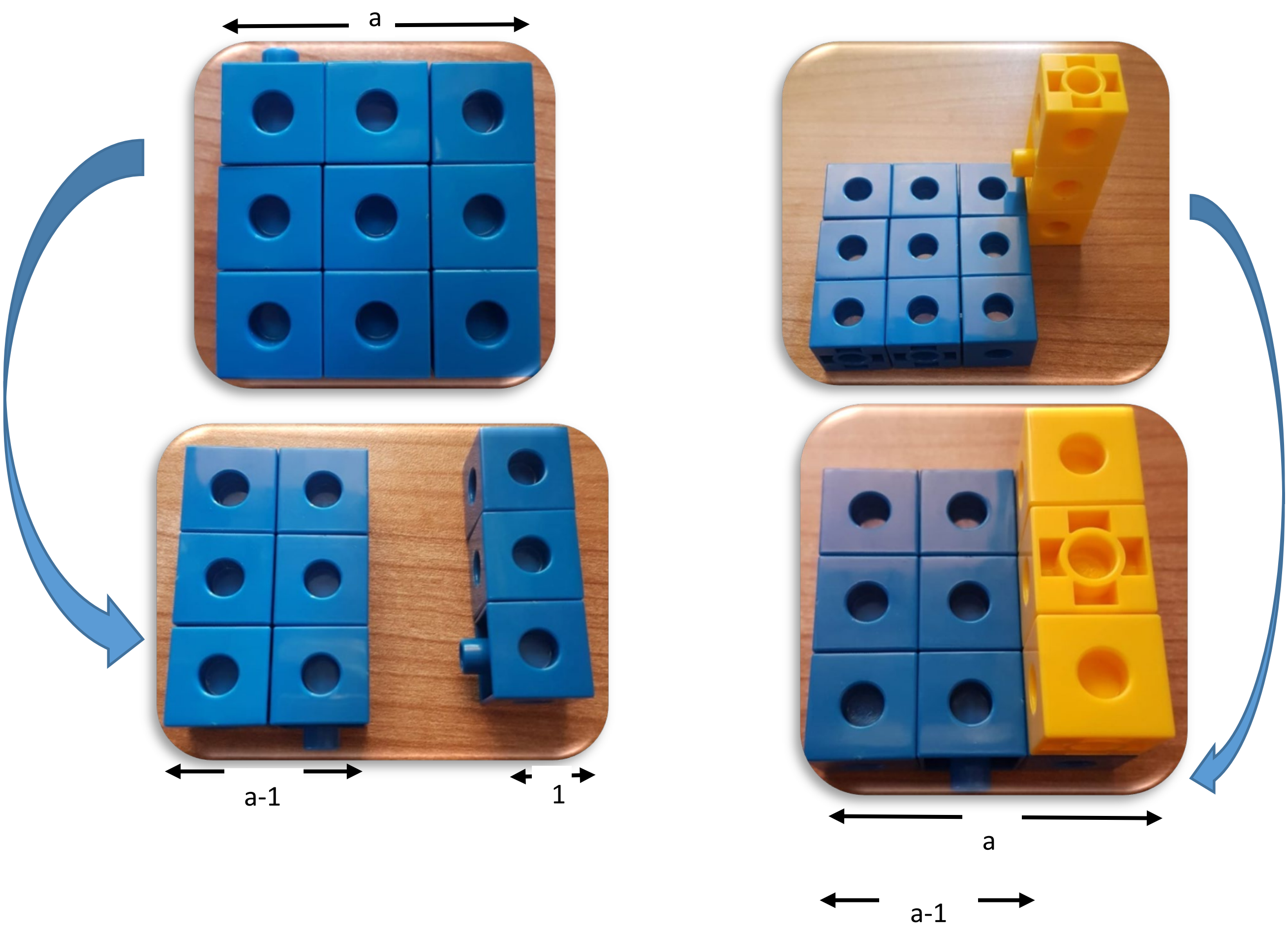
Forma Incorrecta

Figura 6. Forma correcta e incorrecta de la unión entre las figuras

El objetivo es formar cuadrados o rectángulos con los hechos anteriormente de tal manera que no queden espacios vacíos entre ellos. Una vez construida la figura resultante deben deducir las longitudes de los lados, para esto, se sumará la longitud de cada uno de los lados que componen el lado total.

Sobreposición o extracción entre las figuras (Representación de la resta)

Para poder simbolizar un término negativo de un polinomio tenemos dos posibilidades, la primera de ellas sería "eliminar" el termino negativo y la otra posibilidad sería colocar la figura que representa el termino negativo sobre otra figura de mayor área, siempre y cuando, tengan al menos, la misma longitud de uno de sus lados. En la siguiente imagen se indica la representación del polinomio $a^2 - a$ con las figuras construidas a partir de los cubos conectores como se expone en la figura 7.



Primer caso **Segundo caso**

Figura 7. Sobre posición o extracción entre las figuras

Figuras equivalentes

Dos o más figuras son equivalentes si las longitudes de los lados entre estas son iguales. En la figura 8, podemos observar como ambos rectángulos son equivalentes.

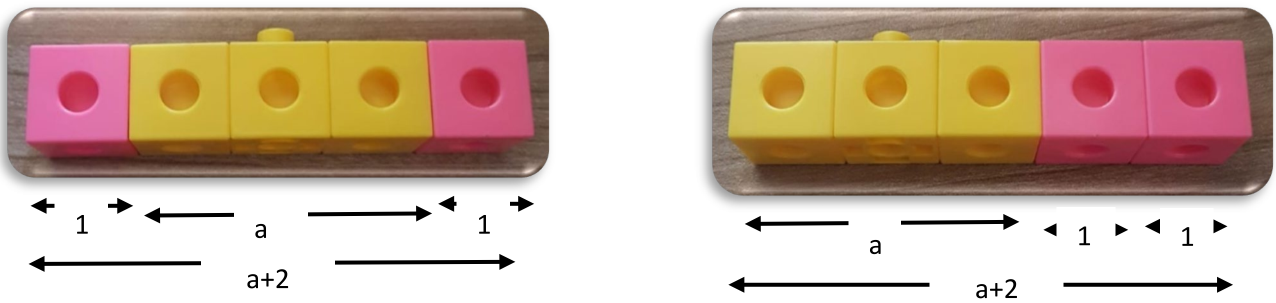


Figura 8. Figuras equivalentes

Cómo llegamos a factorizar un polinomio

Vamos a factorizar el polinomio $a^2 + 3a + ab + b + b^2$. Para ello, necesitamos un cuadrado de lado a, tres rectángulos de base a y altura 1, un rectángulo de base b y altura a y un cuadrado de lado. Veamos en la figura 9 la construcción final.

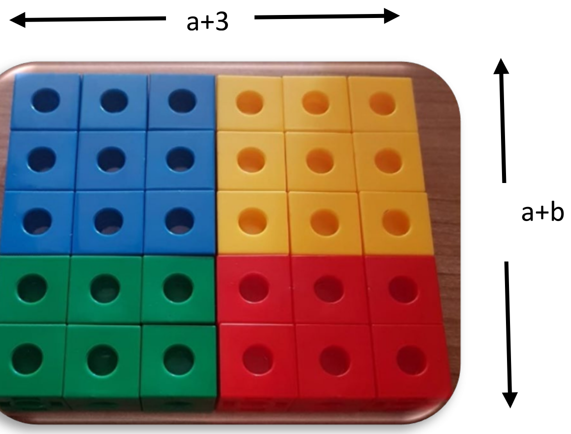


Figura 9. Representación del polinomio $a^2 + 3a + ab + b + b^2$

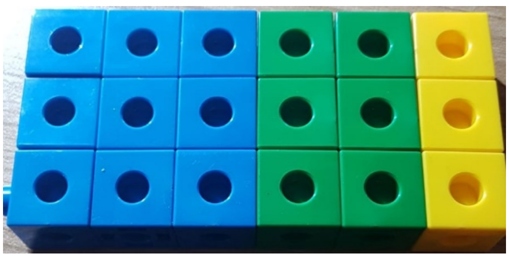
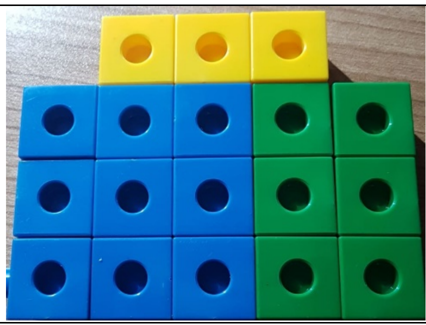
Así pues $(a + 3) \cdot (a + b)$ es la factorización del polinomio $a^2 + 3a + ab + b + b^2$

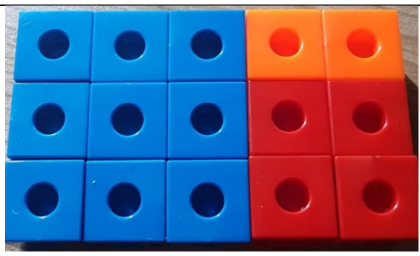
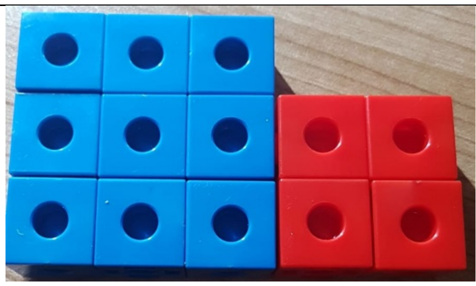
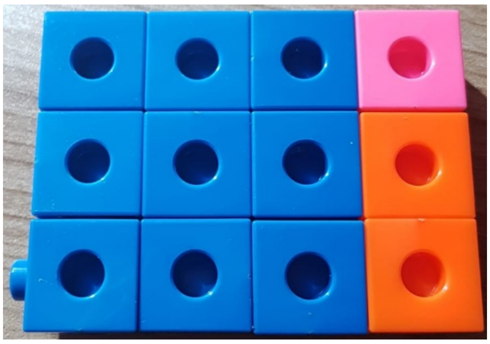
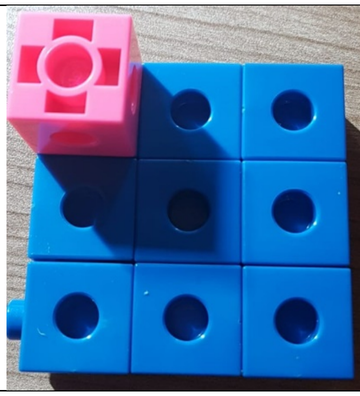
Después de disipar las dudas que tuvieron algunos estudiantes pasamos a realizar una serie de actividades.

En esta primera fase de motivación promovimos una experiencia educativa, que incitó y amplió la curiosidad a través del material manipulativo.

En las actividades que propusimos queríamos ver el desarrollo de las habilidades de los estudiantes, abriendo su mente a una nueva perspectiva de las matemáticas.

Actividad 1: Observa y responde

Formas correctas	**Formas incorrectas**
	

a. ¿Qué diferencias hay entre las dos columnas? ¿Qué harías para pasar del modo incorrecto al correcto?
b. ¿Qué representan las figuras resultantes de la primera columna?

Actividad 2: Construir dos cuadrados de lado a, un rectángulo de base a y altura b. Una vez tengáis las figuras, construir una forma correcta. ¿Qué figura resultante te ha salido? ¿Cuáles son sus longitudes? ¿Y el área?

Actividad 3: Construir cuantas maneras os sea posible de forma correcta, figuras con todas los cuadrados y rectángulos que tenéis. Respondiendo el tipo de la figura resultante que ha salido y las medidas de sus longitudes.

Actividad 4: Factoriza con el material manipulativo las siguientes expresiones algebraicas

a) $3a^2 + 5a + 2$
b) $a^2 + a + b + b^2$
c) $a^2 - 4$
d) $6ab + 6a^2 + 3a + 3b$
e) $6b^2 + 10b + 4$

Actividad 5: Factoriza con el material manipulativo las siguientes expresiones algebraicas

a) $b^2 + 2b + 1$

b) $a^2 + 2ab + b^2$

c) $a^2 - 2a + 1$

d) $a^2 - 2ab + b^2$

Representaciones simbólicas.

En esta etapa pasamos de utilizar el material manipulativo exprofeso, para hacer las representaciones de los cuadrados y rectángulos en los cuadernos de cada grupo.

Al principio surgió la necesidad de hacer las representaciones con bolígrafos de colores, en lo que detallamos que fueran fijándose en lo que hacían para que no tuviesen la necesidad de utilizar diferentes colores para cada representación. En la figura 10 vemos el cambio de lo concreto a lo pictórico.

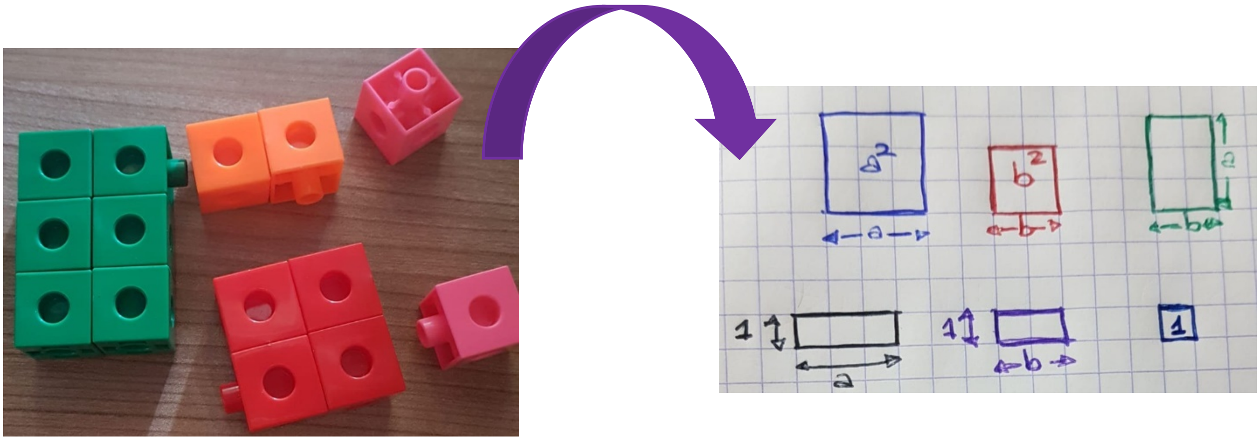


Figura 10. Paso de la etapa concreta a la pictórica

Para la representación de la resta, concluyeron que les era más sencillo "eliminar" las cantidades negativas, que hacer una sobre posición entre ellas. En la figura 11, se detalla la representación que hicieron los estudiantes relativo a la resta.

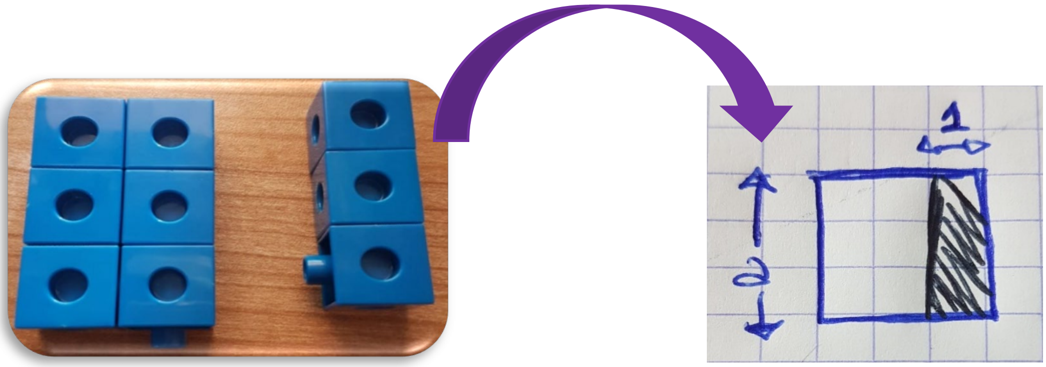


Figura 11. Representación de $a^2 - a$

Esta fase introdujo al alumnado en el aparato conceptual y procedimental del tema tratado y, a su vez, lo familiarizó con los procesos y métodos necesarios para su comprensión.

Actividad 1: Teniendo en cuenta que para realizar las figuras los factores deben ser primos relativos, factoriza las siguientes expresiones algebraicas

a) $x^2 + 2xy + y^2$
b) $z^2 + 2z + 1$
c) $y^2 - 2y + 1$

Actividad 2: Ahora en vez de utilizar el material manipulativo, representar en vuestro cuaderno todas las figuras que se han realizado en clase.

Actividad 3: Contestad a las siguientes preguntas

a) ¿Cuál es el resultado del cuadrado de la suma?
b) ¿Cuál es el resultado del cuadrado de la resta?
c) ¿Suma por diferencia?

Formalizar los aprendizajes adquiridos al lenguaje algebraico.

Para pasar a dicha etapa, primero les introdujimos el concepto de expansión como se muestra en la figura 12:

Factorización

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

Expansión

Figura 12. Concepto de expansión

Así pues, les propusimos un reto, en el que iban a trabajar todo el grupo-clase para alcanzarlo.

Reto: Sean a y b dos números reales cualesquiera. Sabiendo que la representación en la recta real de "a" sería y la de "b", llegamos a que:

- La representación de "a+b" seria:
- La representación de "a-b" sería:

Demostrar geométricamente teniendo en cuenta las representaciones anteriores la expansión de $(a+b)^2, (a-b)^2$ y $(a+b)(a-b)$.

El objetivo de este reto era que se concienciasen de los productos notables, sin que tuvieran que memorizar dichas expresiones.

Para afianzar los conceptos de factorización y expansión se les pidió que realizasen los siguientes ejercicios, esta vez, volviendo al grupo de partida.

Actividad 1: Factoriza las siguientes expresiones.

a) $x^2 + 2xy + y^2$
b) $x^2 + 2x + 1$
c) $4 + 4y + y^2$
d) $z^2 - 6z + 9$
e) $a^2 - 8a + 16$
f) $z^2 - 9$
g) $x^2 - 121$
h) $b^2 - 16$

Actividad 2: Expande las siguientes expresiones.

a) $(x + y)^2$
b) $(x - y)^2$
c) $(1 + y)^2$
d) $(z - 4)^2$
e) $(2a - b)^2$
f) $(2x - 1)^2$
g) $(x + y)(x - y)$
h) $(z + 5)(z - 5)$

En la última sesión se les hizo de manera individual una prueba escrita.

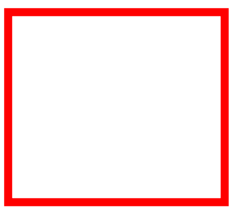
PRUEBA ESCRITA

Nombre y Apellidos:

Curso:

PROBLEMA Nº1: Factorizar la siguiente expresión algebraica $x^2 + 3x + 2$, teniendo en cuenta que:

- x^2 es el área de un cuadrado de lado "x"



- x es el área de un rectángulo de base "x" y lado 1.

- Las unidades se representan como cuadrados de lado 1.

PROBLEMA Nº2: Efectúa las siguientes operaciones con polinomios, y cuando obtengas el resultado de los apartados b), d), g) y h) compruébalo mediante la representación geométrica:

a) $2x \cdot (3-4x) - 7x \cdot (1-2x) =$

b) $(2x+1)^2 =$

c) $(x-3)(x+3) - 5 \cdot (4x-2) =$

d) $(3-2x)^2 =$

e) $(3x^2-2x) \cdot (x^2-6x) - 3x \cdot (x^3-5x^2) =$

f) $\frac{x}{2} + \frac{x-1}{3} - \frac{2(x-4)}{4} =$

g) $(3x-2y)^2 =$

h) $(1-2z)^2 =$

Cuando iniciaron la parte de ecuaciones, se les propuso un ejercicio para consolidar que el paso al lenguaje algebraico les cuesta.

Ejercicio propuesto: Pablo pesa 7 kilos menos que Federico. Federico pesa 5 kilos más que Marta. Andrea pesa la mitad de lo que pesan Pablo y Marta juntos. Rubén pesa 7/8 de lo que pesa Andrea. Entre todos pesan 240 kilos. Teniendo en cuenta eso, y llamando x al peso de Marta:

a) Expresa en la tabla, el peso de cada uno:

	Federico	Pablo	Marta	Andrea	Rubén	Todos
Peso			x			

b) Escribe una ecuación que te permita calcular el peso de cada uno.

Resultados

En la siguiente figura 13 se muestra el porcentaje de los estudiantes observando los errores cometidos antes de realizar la propuesta metodológica.

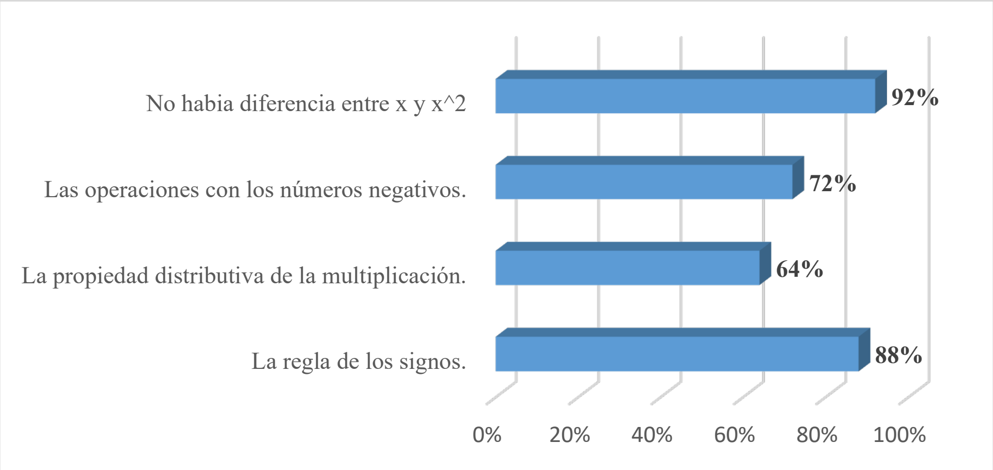


Figura 13. Errores más comunes. Fuente: Elaboración propia a través de los datos disponibles.

Haciendo referencia a los datos obtenidos, se puede observar, la evidencia de los errores y obstáculos que presentan los estudiantes al iniciarse con el álgebra, y todos ellos tienen el concepto de la multiplicación. Por lo que nos vimos en la tesitura de elaborar una sesión para solventar los errores que arrastraban con la aritmética.

Para ello, creímos conveniente hacerles una serie de preguntas y que ellos mismos construyesen el concepto a través de sus pares y las nuestras cuando creyéramos necesario:

P: ¿Qué significa para vosotros multiplicar?

A: Eso es lo de las tablas, lo vimos en el colegio, y nos lo tuvimos que aprender de memoria.

P: Vale, y podréis decirme ¿qué significa dos por tres?

A: ¡Seis! La tabla del dos es muy fácil.

P: Tenéis razón, pero si os pidiéramos que nos razonarais porqué da seis, ¿qué nos diríais?

A: No sabemos qué es lo que nos queréis decir, ¿es que no vale con saberse las tablas de multiplicar?

Tras conocer, que el concepto de la multiplicación no lo tenían, procedimos a explicarlo.

A partir de esto, nos dimos cuenta que con la simbología de la multiplicación (“·”), no tenían muy claro el significado de “3x”, pues no estaba el símbolo matemático por ninguna parte, pero una vez explicado el concepto de la multiplicación se disiparon dichas cuestiones.

Tras dicha sesión, empezamos con la propuesta didáctica. Al introducir el material manipulativo en el aula, generó una buena expectación, aunque bien es cierto que el abordaje de la geometría en el álgebra no fue de mucho agrado, argumentando que las nociones que tenían de la geometría eran bastante escasas.

Nos adelantamos a los posibles errores de concepto que pudieran tener, para poderlos solventar desde un principio. Empezamos con el concepto del signo igual. Para ello, les dijimos que construyesen como quisieran, un cuadrado azul con dos amarillos. Como era de esperar al menos nos encontramos dos formas distintas de la construcción, como podemos observar en la figura 14.

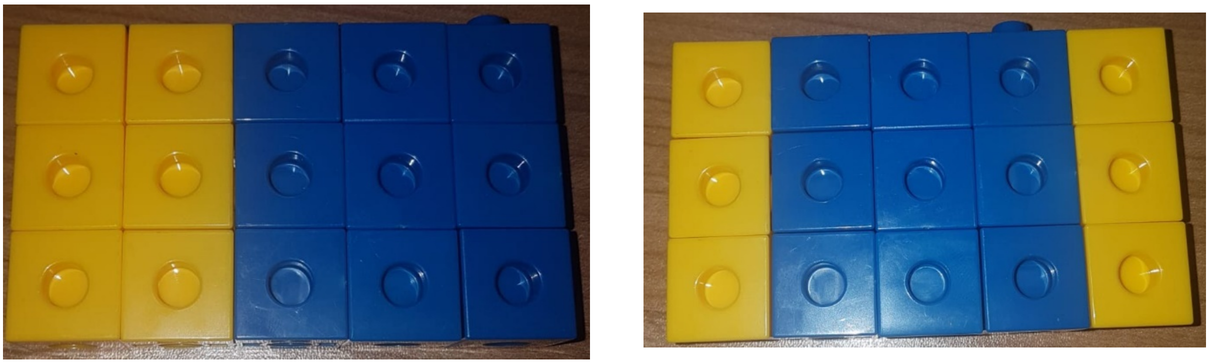


Figura 14. Representaciones más comunes entre los estudiantes

Mantuvimos la siguiente conversación:

P: Tenemos dos representaciones diferentes. ¿Son iguales?

A: No, en un caso los rectángulos están juntos, y en el otro están entre el cuadrado.

P: Estamos de acuerdo, en que, visualmente hablando son diferentes, pero si en ambos casos habéis utilizado el cuadrado azul y dos rectángulos amarillos, algo tendrán en común.

E1: Pues muy sencillo, que las dos tienen las mismas figuras.

E2: Y si tienen las mismas figuras, ¿por qué no son iguales?

E1: ¿A caso no ves que la colocación es diferente?

P: Ambos tenéis razón, y es que, si los rectángulos y el cuadrado no se diferenciaran por los colores, tendríamos la misma figura…Pero no es nuestro caso, ¿alguien sabría decirme qué quiere decir que dos figuras sean equivalentes?

E1: Eso es de geometría, ¿no estábamos con álgebra?

E2: Si, pero ya dijo que las iba a relacionar.

E3: ¡Eso es porque tienen la misma área!

P: Muy bien, y si tienen la misma área es porque…

A: ¡Tienen los mismos lados!

Así, pudimos rememorar otro concepto del signo igual, que es el de equivalencia, como se puede observar en la tabla 4 del marco teórico.

Cuando pasamos a la representación pictórica de la factorización, creímos conveniente que en la primera actividad se fueran habituando a que los factores no tenían que llamarse "a" y "b", sino que podían tomar otro tipo de letras, o la combinación entre letras y números. Con ello, llevamos a cabo que tomasen las letras como variables, como se muestra en la tabla 3 "Etapas del uso de las letras según Küchemann" del marco teórico.

Finalmente, cuando pasamos a la etapa abstracta, les costó hacer las construcciones de los productos notables, y luego plasmar la relación de la expansión con el de factorización.

En la figura 15, podemos ver los fallos que hubo en la prueba escrita. Creemos que es conveniente advertir que los exámenes los hicieron en hojas en blanco, mientras que, en las sesiones los ejercicios los realizaban con cuadricula, además de advertirles que debían de entregar todas las hojas que hubiesen escrito, aunque fueran meras operaciones.

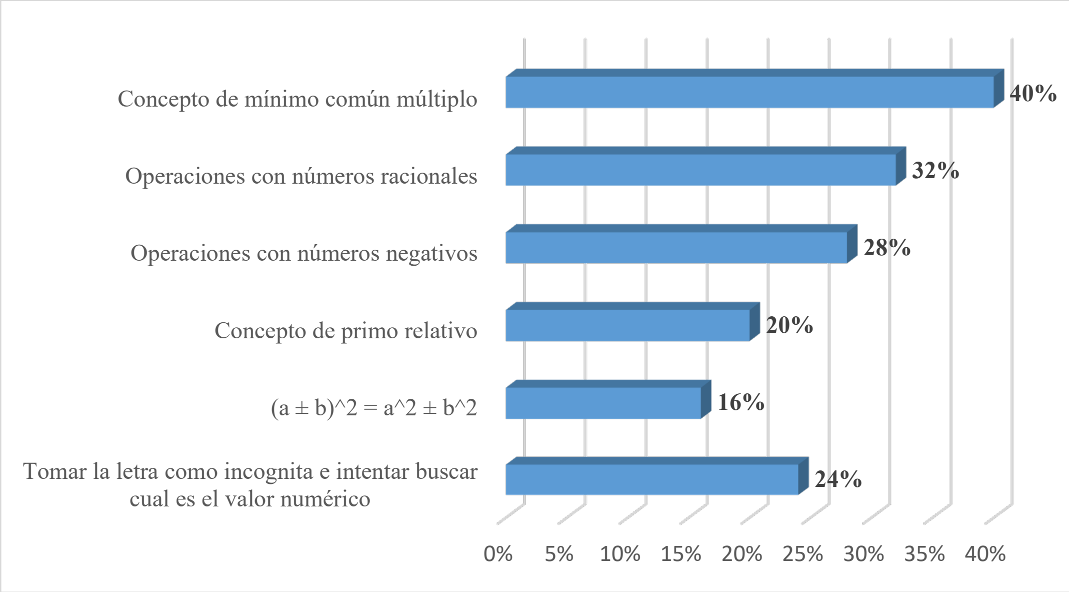


Figura 15. Errores en la prueba escrita. Fuente: Elaboración propia a través de los datos disponibles.

Vimos que el concepto de primos relativos no lo tuvieron claro por las representaciones que hicieron, mostradas en la figura 16.

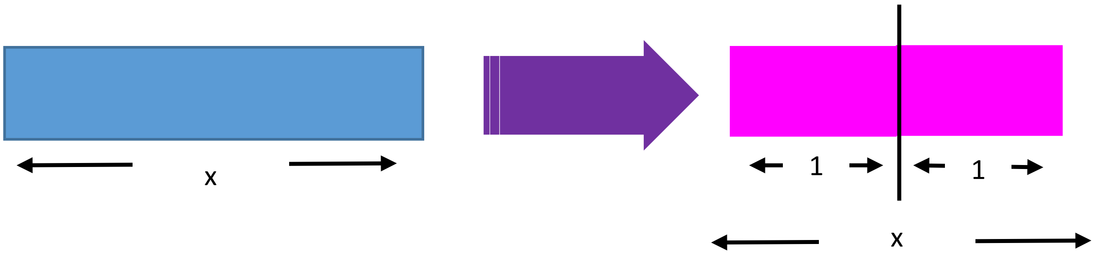


Figura 16. Representaciones de los alumnos

En la figura 15, podemos observar que el concepto de la multiplicación les quedó más claro, pues ni en los ejercicios que se hicieron en el aula, ni en la prueba escrita, no hay errores de esa tipología. Lo que sí que podemos concluir es que el paso de la aritmética al álgebra les confunde demasiado, y en su mayor medida es debido a que los conceptos no los tienen bien consolidados. Y es que la evidencia está en que solo el 16% de los estudiantes no llegaron a interiorizar el concepto abstracto, pero si el simbólico, pues hay que tener en cuenta que cada estudiante tiene su propio ritmo de aprendizaje.

Conclusiones.

El objetivo general de este trabajo era diseñar e implementar una propuesta de trabajo en el aula de 2º ESO para conocer el alcance de los conocimientos de los estudiantes acerca de procedimientos algebraicos básicos y categorizar los errores frecuentes que cometen al operar con expresiones tanto numéricas como algebraicas. Para ello ha sido necesario saber las equivocaciones y los obstáculos que presentan los estudiantes con el bloque de álgebra. Tras la investigación de diversas fuentes para el trabajo se realizó una propuesta didáctica que se llevó a cabo durante siete sesiones en el aula. Y para cumplir este objetivo ha sido necesario conseguir los objetivos específicos, enumerados a continuación:

- En relación con el primer objetivo específico *seleccionar y elaborar un dossier de material manipulativo específico para el aprendizaje del álgebra,* en el marco legislativo se han estudiado y se han entendido las propuestas internacionales como las del NCTM y CCSSO, además de comprobar mediante la legislación vigente tanto en la comunidad autónoma como en la estatal, para tener conocimiento de los contenidos que se desempeñan en el bloque de álgebra que se deben cumplir para la aplicación en el aula.
- Con respecto al segundo y tercer objetivo específico *plantear actividades con operaciones entre expresiones algebraicas, la simplificación de expresiones racionales y la factorización sobre los diversos conjuntos numéricos; analizar las representaciones de los problemas desarrollados, prestando especial atención a la representación pictórica del problema, y al lenguaje simbólico*. Para ello, se ha realizado en el marco teórico un estudio exhaustivo sobre los errores más comunes que tienen los estudiantes, prestando mayor atención en la transición de la aritmética al álgebra, como los distintos significados que van viendo sobre el signo igual y las letras como lenguaje específico, pues son las actividades que más problemas acarrean. Además, dichas tareas las hemos ido diseñando de manera progresiva, pues necesitábamos saber dónde teníamos que enfatizar más, teniendo en cuenta las fases del enfoque competencial detalladas en el marco teórico, donde pasábamos del material manipulativo a las representaciones pictóricas finalizando con el lenguaje especifico de las matemáticas.
- Respecto al cuarto objetivo específico *plantear y resolver problemas que conducen a ecuaciones lineales*. Después de realizar la prueba escrita para determinar si los conceptos adquiridos tenían una base lo sufrientemente sólida, les propusimos un ejercicio, para ver cuáles eran las deficiencias que tenían de pasar del lenguaje cotidiano, al lenguaje algebraico. El resultado no fue desastroso como pensábamos en un principio, sí que es cierto que ese paso les cuesta, pero pusimos en marcha un debate entre pares, siendo nosotros los moderadores, para que ellos mismos tuvieran que

buscar a través del libro de texto, los procedimientos que tenían que llevar a cabo, y así poder disipar las dudas o equivocaciones que tuviesen.

En el marco teórico también hablamos sobre *Early Algebra*, y es que estamos de acuerdo con dicha propuesta, pues la aritmética y el álgebra están ligadas entre sí, y que, si se fuera introduciendo de una forma más paulatina, no tendríamos unos resultados tan catastróficos en el bloque de álgebra.

Terminamos concluyendo que es posible llevar a cabo enfoques y metodologías diferentes a la tradicional, haciendo más atrayentes las sesiones y despertando interés en este bloque, pues la encuentran demasiada abstracta y desconectada del mundo real.

Referencias Bibliográficas

Alsina, Á. (2010). La "pirámide de la educación matemática", una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática. *Aula de Innovación Educativa*, 189, 12-16.

Alsina, Á. (2012). Más allá de los contenidos, los procesos matemáticos en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 1(1), 1-14.

Alsina, Á. (2016). Diseño, gestión y evaluación de actividades matemáticas competenciales en el aula. *Epsilon, 31*(1), 7-29.

Anderson, J. R. (1990). *Cognitive psychology and its implications* (3rd ed.). New York: Freeman.

Arcavi, A. (1994). Symbol sence: informal sence-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics,* 1(3), 24-35.

Artigue, M. (2012). Enseignement et apprentissage de l'algèbre. Recuperado de: http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/

Grupo Azarquiel. (1991). *Ideas y actividades para enseñar algebra*. Madrid: Síntesis.

Bardini, C., Radford, L., y Sabena, C. (2005). *Struggling with variables, parameters, and indeterminate objects or how to go insane in mathematics*. In H. Chick, and J. Vicent, (Eds.). Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. II, 129-136. Australia. Melbourne: Design and Print Centre, University of Melbourne.

Bastable, V. y Schifter, D. (2007). *Classroom stories: examples of elementary students engaged in early algebra*. En J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), Algebra in the early grades (pp. 165-184). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Binaburo Iturbide, J. A. y Gijón Puerta, J. (2007). *Cómo elaborar una programación de aula en enseñanza secundaria.* Sevilla: Fundación ECOEM.

Blanton, M. L. y Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. Journal for Research in Mathematics Education, 36(5), 412-446.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en procesos de algebrización: el caso de la proporcionalidad. Recherches en Didactique des Mathématiques. 21(3), 247-304.

Booth, L.R (1999). Children´s Difficulties in Beginning Algebra. En B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking. Grades K-12. Readings from NCTM´s school-based journals and others publications* (pp. 299-307). Reston, VA: NCTM

Bouvier, A. y George, M. (2000). *Diccionario de matemáticas* (2ª Edición). Madrid: Akal ediciones.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problémes en mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques. 4(2), 165-198.

Burgell, F. y Ochoviet, C. (2015). Significados del signo de igual y aspectos de su enseñanza. Un estudio realizado con estudiantes de primer año de enseñanza secundaria y sus profesores. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(3), 77-98.

Burns, M., y Silbey, R. (2000). *So you have to teach math? Sound advice for K-6 teachers*. Sausalito, CA: Math Solutions Publications.

Cajaraville, J., Cachafeiro, L., Fernández, T., Ferro, y Salinas, M. (2012*). Problemática Didáctica del estudio del álgebra en Educación Secundaria.* Santiago de Compostela: Imprenta Universitaria.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Reston, VA: NCTM e IAP.

CCSO (2009) *Common Core State Estandars Iniciative*. Preparing America's students for success. Recuperado de: http://www.corestandards.org/other-resources/key-shifts-in-mathematics/

Chevallard, G., Bosch, M. y Gascón, J. (1997*). Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* Barcelona: ICE-Horsi.

Davydov, V. V. (2000). *Types of Generalization in Instruction: Logical and Psychological Problems in the Structuring of School Curricula. Soviet Studies in Mathematics Education* (Vol. 2). Reston Virginia: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). Recuperado de https://www.marxists.org/archive/davydov/generalization/generalization.pdf.

Drijvers, P. y Hendricus, M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra enviroment: desing researchs on the undestarnding of the concept of parameter*. [Tesis doctoral no publicada]. Universidad de Utrecht, Utrecht. Recuperado de https://dspace.library.uu.nl/bitstream/handle/1874/886/full.pdf

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitive de la pensé. *Annales de Didactique et de Sciencies Cognitives*. 5, 37-65.

Eggen, P. D., & Kauchak, D. P. (2000). *Educational psychology: Windows on classrooms* (5th ed.). Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Enfedaque, J. (1990). De los números a las letras. *Suma*, 5, 23-34.

Euclides (1956), *The Thirteen Books of Elements.* Translated with introduction and commentary by Sir Thomas Heath, Vol. 2, Dover.

Furinghetti, F. y Paula, D. (1994). Parameters, unknowns and variables: a Little differencé? In J. Da Ponte, and J. Matos, (Eds.). *Proceedings of the 18th International Conference of the Psychology of Mathematics Education*. Vol. II, 368-375. Portugal: Universidad de Lisboa.

Fuson, K. C. (1988). *Children's counting and concepts of numbers*. New York: Springer.

Godino, J., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Researches en Didactique des Mathématique*, 14 (3) 325-355.

Godino, J. (2002). Competencia y comprensión matemática: ¿Qué son y cómo se consiguen? *UNO*, 29, 9-19.

Godino, J. y Font, V. (2003). Razonamiento algebraico para maestros. En J. Godino, (Eds.) *Matemática y su didáctica para Maestros. Proyecto Edumat-Maestros* (pp. 771-826). Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros.

Gómez, B. (1988). *Numeración y cálculo. Matemáticas: cultura y aprendizaje.* Madrid: Editorial Síntesis

Gómez, B. (1995). Los viejos métodos de cálculo. Un dominio para transitar de la aritmética al álgebra y viceversa. *Suma*, 20, 61-68.

Hewitt, D. (1998). Approaching Arithmetic Algebraically. *Mathematics Teaching, 163*, 19-29

Janvier, C. (1987). Traslation Processes in Mathematics Education. In C. Janvier, (Eds.). *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 27-32). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. (1995). *A research base supporting long term algebra reform?* Norht American Chapter of The International Group for the Psychology of Mathematics Education, Columbus, OH.

Kaput, J. (1998). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. (1999). Teaching and Learning a New Algebra. In E. Fennema, and T. Romberg, (Eds.). *Mathematics Classrooms that Promote Understanding* (pp. 135-155). Mahwa. NJ: Laurence Erbaum Associates Inc. Publishers

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is Algebraic Reasoning?. In J.J. Kaput, D. Carraher & M.L.Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-17). New York : Routledge.

Kindt, M. (1980). Als een kat om de hete algebrit. *Wiskrant, 5*(21), 155-157.

Kieran, C. (1981). Concepts Associated with the Equality Symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12(3), 317-326. Recuperado de https://doi.org/10.1007/BF00311062.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: a structural perspective. En S. Wagner y C. Keiran (Eds), *Researchs Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, Vol. 4 (pp. 33-59). Reston, VA.: Lawrence Erlbaum Associates and NCTM.

Kieran, C y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*. 7(3), 58-81.

Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. In D. Grouws, (Eds.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (A project of the NCTM)* (pp. 390-419). New York: Macmillan Publishing Company.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In C. Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde y A. Pérez (Eds.), *8th International Congress on Mathematical Education* (pp. 271-290). Seville, Spain: SAEM Thales.

Kieran, C. (1997). Mathematical concepts at the secondary school level: the learning of algebra and function. In T. Nunes, and P. Bryant, (Eds.). *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 133-157). East Sussex UK: Psychilogy Press.

Kieran, C. (2004). *Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? The Mathematics Educator*, 8(1), 139-151. Recuperado de http://tme.journals.libs.uga.edu/index.php/tme/index.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. In A. Gutiérrez, and P. Boera, (Eds.). *Handbook on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future* (11-49). UK: Sense Publishers.

Kieran, C. (2007). Learning and Teaching Algebra at the Middle School Through College Levels. *En Lester, F. K. (Ed.). Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 707-762). Reston, Virginia: NCTM e IAP.

Kieran, C., Pang, J.S. Schifter, D. y Fong, S. (2016). *Early Algebra*. Hamburg: Springer. Recuperado de https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F978-3-319-32258-2.pdf.

Knuth, E., Alibali, M., McNeil, N., Weinberg, A. y Stephens, A. (2011). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence y variable. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp. 259-276). New York, NY: Springer. Recuperado de https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_15

Küchemann, D. (1980). *Children understands of numerical variables. Mathematics in school*. 7(4), 23-26.

Linchevski, L. (1995). Algebra with numbers and arithmetic with letters: a definition of pre-algebra. *Journal of Mathematical Behaviour, 14*, 113-120.

Linchevski, L. y Herscovics, N. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: Operating on the unknown in the context of equations. *Educational studies in mathematics*, 30(1), 39-65. Recuperado de https://doi.org/10.1007/BF00163752

Lins, R. y Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: the current state of the field. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds), *The teaching and learning of algebra. The 12th ICMI Study* (pp.47-70). Norwell, MA: Kluwer Academic Publishers.

Mancera, E (1998). *Matebloquematica*. México, D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

Manson, J., Graham, A. y Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing Thinking in Algebra*. London: The Open University y Paul Chapman Publishing

Martin, D. J. (2000). *Elementary science methods: A constructivist approach* (2nd ed.). Belmont, CA: Wadsworth.

Mercer, N. (2001). *Palabras y mentes*. Barcelona: Paidós.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de Primaria*. [Tesis de doctorado]. Universidad de Granada. Disponible en línea: http://documat.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=1210

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, 3(3), 135-156.

Molina, M., Castro, E. y Castro, E. (2009). Elementary students understanding of the equal sign in number sentences. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 17(7 (1)), 341-368.

Muñoz, J.M., Arnal, A., Beltrán, P., Callejo, M.L. y Carrillo, J.(Eds.), (2017) *Investigación en Educación Matemática XXI.* Zaragoza: SEIEM.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teacher of Mathematics. Recuperado de: http://standards.nctm.org.

NCTM. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática.* Granada: Servicio de Publicaciones de la SAEM Thales.

Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato para la mejora de la calidad educativa. *Boletín Oficial del Estado, 25,* de 29 de enero de 2015, 1 a 18.

Palarea M., y Socas, M. (1994). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico. *SUMA*, 16, 91-98.

Papila, D. E., y Olds, S. W. (1996). *A child's world: Infancy through adolescence* (7th ed.). New York: McGraw-Hill.

Piaget, J. (1977). *Epistemology and psychology of functions*. Dordrecht, Netherlands: Reidel Publishing Company.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, 295, de 22 de mayo de 2019, 97858 a 97921. Recuperado de https://www.boe.es/boe/dias/2015/01/03/pdfs/BOE-A-2015-37.pdf

Radford, L. (2002). Algebra as tekhnē. Artefacts, symbols, and equations in the classroom. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*.1 (1), 31-56.

Rojano, T. (2002) Mathematics Learning in the Junior Secundary School: Students Access to Significant Mathematical Ideas. En L.D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 143-163). Mahwak, NY: Lawerence Erlbaum Associates.

Rojas, P., Rodríguez, J., Romero, J., Castillo, E., y Mora, L. (1999). *La transición del aritmética al álgebra. Grupo Pretexto.* Bogotá: Gaia-Universidad Distrital.

Sanhueza, A.M. (21 de julio de 2011). Sin miedo a las matemáticas. *Qué pasa*. Recuperado de http://www.quepasa.cl/articulo/actualidad/2011/07/1-6171-9-sin-miedo-a-las-matematicas.shtml/

Schmittau, J. y Morris, A. (2004). The Development of Algebra in the Elementary Mathematics Curriculum o V.V. Davydov. *The Mathematics Educator*, 8(1), 60-87. Recuperado de http://tme.journals.libs.uga.edu/index.php/tme/index

Schoenfeld, A y Arcavi, A. (1999). On the meaning of variable. In B. Moses (Ed.). *Algebraic Thinking Grade K-12* (pp. 150-156). Reston (Virginia): National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

Sfard, A. y Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification. The case of Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26(1), 191-228. Recuperado de https://doi.org/10.1007/BF01273663

Socas, M. (1997). Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Escuela de Secundaria. En L. Rico et al (Eds.). *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (125-154). Barcelona: ICE-Horsori.

Sutherland, R. (1997). *Teaching and learning algebra pre-19*. London: The Royal Society. Recuperado de https://royalsociety.org/~/media/Royal_Society_Content/policy/publications/1997/10183.pdf

Thompson, C. S. (1990). Place value and larger numbers. In J. N. Payne (Ed.), *Mathematics for young children* (pp. 89–108). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Trigueros M., y Ursini, S. (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? *Revista Matemática Educativa*. 18(3), 5-38.

Uicab, G. (2009). Materiales tangibles. Su influencia en el proceso enseñanza y aprendizaje de las matemáticas [Versión electrónica]. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, (22)*. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Ursini, S., y Trigueros, M. (1998). Dificultades de los estudiantes universitarios frente al concepto de variable. *Investigaciones en Matemática Educativa II*. Mexico: CINVESTAV-IPN.

Usiskin, Z. (1999). Conception of School Algebra and uses of variables. In B. Moses (Ed.). *Algebra Thinking Grade K-12* (7-13). Reston (Virginia): National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

Van Ameron, B.A. (2002). *Reinvention of early algebra. Developmental research on the transition from arithmetic to algebra.* Utrecht: CD-β Press y Center for Science and Mathematics Education. Recuperado de http://igitur-archive.library.uu.nl/dissertations/2002-1105-161148/full.pdf

Weinert, F. E., & Helmke, A. (1998). The neglected role of individual differences in theoretical models of cognitive development. *Learning and Instruction*, 8, 309–324.